

HOMOLYA DÁNIEL–BENEDEK GÁBOR

# Banki működési kockázat elemzése – katasztrófamodellezés<sup>1</sup>

Napjainkban a pénzügyi intézmények, a szabályozás követelményeinek és a belső motivációs erőknek köszönhetően, egyre intenzívebben foglalkoznak kockázataikkal. Az eddigiekben fókuszban lévő hitelezési és piaci kockázat mellett újdonságot jelent a működési kockázat módszeres megközelítése. A működési kockázat alatt az emberek, rendszerek, folyamatok nem megfelelő, esetleg hibás működéséből, vagy külső eseményekből fakadó veszteségek kockázatát értjük. Ehhez a témához kapcsolódó cikkünkben először a működési kockázati alapfogalmakat, mérési módszereket, majd egy saját szimulációs modellt és annak feltételezéseit ismertetjük. Modellünk nem a realizált működési kockázati eseményekből és azok statisztikai elemzéséből indul ki, hanem az eseményekhez vezető háttérfolyamatból. Példánkban ez egy sztochasztikus (az Ornstein–Uhlenbeck-féle átlaghoz visszahúzó) folyamat. Katasztrófának tekintjük azt, ha egy bizonyos kritikus tartományon kívül esik a folyamat értéke. Vizsgáljuk a katasztrófa bekövetkezéséhez kapcsolódó gyakorisági, súlyossági eloszlást, és az első katasztrófa bekövetkezési idejének eloszlását, egyedi és két korrelált folyamatot is tekintve. Első eredményeink alapján nem vethető el a Poisson-folyamaton alapuló katasztrófagyakorisági eloszlás, míg a veszteségnagyság szempontjából a vastagabb szélű eloszlások illeszkedése mutatható ki. A katasztrófa első bekövetkezési időpontjának vizsgálata alaposabb elemzést igényel. Elemezzük a szimulációalapú előrejelzés előnyeit, majd a tanulmány végén a további kutatási irányokat mutatjuk be.

## 1. A MŰKÖDÉSI KOCKÁZAT BEMUTATÁSA

A működési kockázat<sup>2</sup> kezelésével kapcsolatos kiinduló kérdés az, hogy mit értünk működési kockázat alatt. A további kifejtés szempontjából kulcsfontosságú a működési kockázat pontos meghatározása és elhelyezése a kockázatok között, hiszen a definíció és az azonosítás rendkívül fontos a kezelés szempontjából. Cikkünkben a működési kockázatot pénzügyi intézmények esetében vizsgáljuk, bár az ismertetett módszerek bizonyos korlátokkal más szektorokban működő intézményekre is alkalmazhatóak.

<sup>1</sup> Dolgozatunk a II. Vállalat és Tőkepiac konferencián, Királyhelmeceken elhangzott előadáson alapul; a konferencia résztvevőinek köszönettel tartozunk észrevételeikért. Ezúton fejezzük ki köszönetünket dr. Király Júliának, a Magyar Nemzeti Bank alelnökének és a Budapesti Corvinus Egyetem (BCE) címzetes egyetemi tanárának értékes megjegyzéseiért, valamint a szakmai támogatásért, amelyet témavezetőként nyújtott Homolya Dánielnek a BCE Doktori Iskolájának doktori programjában.

<sup>2</sup> Az angol nyelvű kifejezés: operational risk, ennek megfelelően a hazai szakirodalomban gyakran operációs kockázatként is emlegetik ezt a fogalmat. Mi a hazai szakirodalomnak, a szabályozási terminológiának megfelelően a „működési kockázat” kifejezést használjuk.

A kockázatkezelési szakirodalom többféle kockázati tipológiát alkalmaz. Napjainkra, összhangban a pénzügyi intézményekre vonatkozó szabályozói elvárásokkal, alapvetően beszélhetünk üzleti kockázatról (pl. az üzleti környezet megváltozásának kockázata), piaci kockázatról (piaci pozíciók értékváltozásának kockázata), hitelkockázatról (hitelfelvevői viszonyban lévő partner nemfizetésének kockázata) és működési kockázatról<sup>3</sup>. Ezen kockázati körön kívül is vannak úgynevezett reziduális kockázatok, amelyeket a Bazel II-es szabályozás a II. pillér alatt kezel. A hitel- és piaci kockázatot együttesen tekinthetjük pénzügyi kockázatnak. Ezen kockázatok (hitel, piaci, működési, üzleti) együttes, összefüggő kezelését nevezhetjük átfogó vállalati kockázatkezelésnek (Enterprise-wide risk management – ERM). Természetesen ennek a négyosztatú klasszifikációnak is vannak hiányosságai (pl. likviditási kockázat), amely azonban az ERM fogalomkörében már megjelenik.

A működési kockázattal mint nehezen megragadható kategóriával kapcsolatos problémák régebben a *definíciónál* kezdődtek, ugyanis nem volt iparági szinten teljes mértékben elfogadott meghatározása.

A legkorábbi és egyben legtágabb definíció szerint minden a működési kockázat kategóriájába tartozik, ami nem pénzügyi (piaci és hitel-) kockázat. Ezt tekinthetjük a működési kockázat *reziduális* meghatározásának. Azonban a normatív definíció hiánya akadályozta a szisztematikus kezelhetőség kialakulását.

A BIS bankszabályozással foglalkozó *Bázeli Bizottsága* érzékelt, hogy a működési kockázattal kapcsolatban az egyik legnagyobb gond az egységes meghatározás hiánya, és az eddigi definíciós problémákat kiküszöbölendő, kialakított egy olyan definíciós környezetet, amely nemcsak a szabályozók, hanem a pénzügyi intézmények oldaláról is elfogadhatóvá és alkalmazott meghatározássá vált. Eszerint „*a működési kockázat az emberek, a belső folyamatok és rendszerek nem megfelelő vagy hibás működése, illetve külső tényezők által előidézett veszteségek kockázata*”<sup>4</sup>. Az új tőkeegyezmény definíciójába beleértendő a jogi kockázat, de a stratégiai és a tekintélyvesztéssel kapcsolatos kockázatok nem sorolódnak a működési kockázati kategóriába. Amennyiben a teljes kockázati teret nézzük, akkor a hitelezési, piaci és működési kockázatokon kívül eső kört nevezhetjük egyéb kockázatnak. Felmerülhet a kérdés, hogy mi állhat a működési kockázatok és az úgynevezett „egyéb” kockázatok (*other risk*) különválasztásának hátterében.

*Cruz* [2002b]<sup>5</sup> értelmezésében a működési kockázat kategóriájába a költségalapon szemlélhető kockázatok, míg az „egyéb” kockázatok kategóriájába az elszalasztott jövedelemhez kapcsolódó kockázati tényezők tartoznak. Természetesen ez az elkülönítés sem eredményez tökéletesen egyértelmű definíciót<sup>6</sup>.

3 Forrás: ERISK RISK JIGSAW, kockázati klasszifikáció (<http://www.erisk.com/Learning/RiskJigsaw.asp>, 2006. július 21.)

4 „... the risk of loss resulting from inadequate or failed internal processes, people and systems or from external events” (BIS [2004]).

5 i. m. 286. o.

6 Alternatív megközelítésként gyakran megjelenik az, hogy a működési kockázati esemény eredményeképpen a realizált eredmény eltér a várttól (ORX [2006], 6.o.). Ezen definíció alapján már kezelhető például az a működési kockázati eseményként értékelt helyzet, amikor például rossz kamatláb miatt alacsonyabb bevételre tesz szert a bank, mint például az üzletszabályzat szerint kellett volna.

Az alábbi táblázatban foglalhatók össze a kétféle típusú kockázat példái:

1. táblázat

**Működési kockázat vs. „egyéb” kockázat (Cruz [2002b] alapján)**

<b>Működési kockázat – Veszteség/költség alapú megközelítés</b>	<b>„Egyéb” kockázatok – Elmaradt haszon</b>
Jogi veszteségek	Reputációs események
Díjak és bírságok	Kulcsalkalmazott távozása
Büntetések	Stratégiai események

Érezhető, hogy a Bázeli Bizottság (illetve az európai uniós CRD) definíciója a *működési kockázat okaira koncentrál*, a korábban alkalmazott, reziduális jellegű iparági definíciónál világosabb, és konkrét kockázati típusokra összpontosít. A kockázati típusok azonban már mint eseménytípusok jelennek meg.

Az új tőkeegyezmény céljával kapcsolatban egyértelműen megállapítható: betölti azt a feladatot, hogy a pénzügyi intézményekben egyértelműen alkalmazható szabályozási kereteket<sup>7</sup> dolgozzon ki, ennek érdekében *veszteségi eseménytípusokat* is definiál, amelyek – pozitív definíciót eredményezve – lehetővé teszik a működési kockázati események meghatározását, szisztematikus azonosítását és kezelését.

Ez a hét veszteségi eseménycategória a következő (BIS [2004], EU [2006])<sup>8</sup>:

1. *Belső csalás*: jogosulatlan tevékenység, lopás és csalás (pl. szándékos téves jelentés, alkalmazotti lopás, bennfentes kereskedés).

2. *Külső csalás*: csalás és lopás, rendszerbiztonság áthágásából fakadó problémák (pl. betörés, aláírás-hamisítás, számítógépes csalás).

3. *Munkáltatói gyakorlat és munkahelyi biztonság*: alkalmazotti kapcsolatból eredő veszteségek, biztonságos munkahelyi környezet hiánya, diszkriminációs cselekmények (pl. munkahelyi biztonsági szabályok megsértése).

4. *Ügyfelek, termékek és üzleti gyakorlat*: megfelelés, közzététel és bizalmi viszony (pl. bizalmas ügyfeladatok kiadása, pénzmosás, engedélyezetlen termékek eladása).

5. *Tárgyi eszközöket ért károk*: katasztrófák és egyéb események (pl. természeti katasztrófák, külső forrásból származó emberi veszteségek, terrorizmus, szándékos károkozás).

6. *Üzletmenet fennakadása vagy rendszerhiba*: rendszerek hibája (pl. hardver-, szoftverproblémák).

7. *Végrehajtás, teljesítés és folyamatkezelés hibái*: tranzakció-végrehajtás, fenntartás, monitoring és jelentéskészítés, dokumentáció, ügyfélnyilvántartás, kereskedelmi partnerek okozta veszteségek (pl. adatrögzítési hibák, nem teljes jogi dokumentáció, kereskedelmi partnerrel felmerülő problémák).

<sup>7</sup> Természetesen a gyakorlat finomodásával fel-fel merülnek újabb és újabb kérdések, amelyek a jelenlegi definíciós keret problémáit vetik fel.

<sup>8</sup> A tőkekövetelmény-direktíva (EU [2006], X. melléklet, 5. rész) hivatalos magyar fordításának kifejezéseit használjuk, mivel cikkünk megírásakor a működési kockázatokról szóló kormányrendeletet még nem fogadták el.

E fenti veszteségesemények lefedik a működési kockázat terét, és összességében elmondhatjuk, hogy a „bázeli” definíció elfogadottá vált mind az iparágban, mind a szabályozói gyakorlatban.

A működési kockázatot érdemes összehasonlítani a másik két kiemelt (piaci és hitel-) kockázattal. Az alábbi táblázat rávilágít mindazon tényezőkre, amelyek a modellezési nehézségeket is mutatják:

2. táblázat

**Egyes kockázattípusok összehasonlítása  
(Elder[2006] és Király Júlia[2005] alapján)**

	<b>Piaci kockázat</b>	<b>Hitelkockázat</b>	<b>Működési kockázat</b>
Kitettség mérhetősége	Igen	Igen	Nehezen körülhatárolható
Jellemzője	Jól mérhető, gazdag statisztikai adatbázis	Statisztikai mérés nehézségei, „nem jól viselkedő” eloszlások	Általában nagy gyakoriságú, kis súlyú vagy kis gyakoriságú, nagy súlyú – statisztikailag nehezen kezelhető
Kockázati tényező	Kamatlábak, devizaárfolyamok, részvényárfolyamok, volatilitás, tőzsdei áruárak hozamának ingadozása	Adós nemteljesítési valószínűsége (PD – probability of default), a veszteség nagysága (LGD – loss given default), a pozíció – „kitettség” nagysága (EAD – exposure at default)	Események gyakorisága (PE – „probability of event”) és súlyossága (LGE – „loss given event”)
Kockázatfelmérés	VaR, stressztesztek, gazdasági tőke	Minősítési rendszerek, PD-LGD modellek, gazdasági tőke	OpRisk VaR, gazdasági tőke Megközelítésben nincs teljes konszenzus: közelítés (top-down, indikátorok) vagy pontos számítás
Mérés megbízhatósága	Jó	Elfogadható	Alacsony
Kockázatkezelés	Limitek, mérlegmenedzsment, származtatott termékek	Limit, fedezet, diverzifikáció, értékpapírosítás, hitel-derivatívok	Folyamatszervezés, rendszerfejlesztés, biztosítás, kockázati transzfer

A fenti táblázatban a működési kockázat egy fontos specialitása nem jelenik meg. A működési kockázat jellemzője, hogy a külső tényezők összejátszhatnak belső tényezőkkel is, így okozva nagy hatású veszteséget: példaként említhetjük a Barings Bank esetét, ahol a belső csalás és a külső piaci mozgások együttesen eredményeztek kulminálódott veszteségkockázatot. A másik két fontos, pénzügyi intézményeket érintő kockázattal, a piaci- és hitelkockázattal szemben a felvállalt nagyobb működési kockázati kitettség nem eredményez nagyobb profitot. Ezért is jelent önálló problémakört, hogy a működési kockázat vizsgálataánál beszélhetünk-e kockázati étvágyról, illetve hogyan definiálható a működési kockázati tolerancia.

Mielőtt e komplex kockázat modellezésére rátérnénk, érdemes felvillantani, hogy milyen a hazai bankok helyzete a működési kockázat területén.

A magyarországi bankok alapvetően a Bázel II-es folyamat részeként kezdték meg a működési kockázat szisztematikus kezelését. A 2008. január 1-jétől kötelezően alkalmazandó szabályozói keret (EU [2006]) egyszerűbb alapmutatóra épülő (BIA), sztenderd és alternatív sztenderd (TSA + ASA), illetve bonyolultabb (fejlett mérési módszer, AMA) módszerek alkalmazását teszi lehetővé. A magyarországi bankszektor jelentős részében megkezdődött a működési kockázati veszteségadatok gyűjtése. Eleinte azonban a kockázatkezelés hozzáadott értéke kevésbé tűnik ki, ezért leginkább a szabályozottság és az informatikai hangsúlyok jelentkeznek. A modellezésen alapuló kockázatkezelés egyelőre kevés intézménynél működik. Abból fakadóan, hogy a hazai bankszektor jellemzően külföldi tulajdonban van, ezért a hazai intézmények az anyabanki iránymutatások, az európai „legjobb gyakorlat” elveit alkalmazva próbálják a működési kockázatot szisztematikusán megközelíteni (PSZÁF [2005]).

## 2. KOCKÁZATMODELLEZÉSI KERET – STILIZÁLT TÉNYEK

A működési kockázat, mint minden kockázati típus, az előfordulási gyakorisággal és a veszteségesemény súlyosságával jellemezhető. Amennyiben mind a gyakoriságot, mind a súlyosságot alacsony és magas kategóriákba soroljuk, akkor a keletkező kétszeres mátrixban működési kockázati szempontból két releváns mezővel szembesülhetünk:

magas gyakoriság – alacsony súlyosság (high frequency – low severity):  
könnyen és jól beárazható kockázati események,

alacsony gyakoriság – magas súlyosság (low frequency – high severity):  
nehezen kivédhető, nehezen előrejelezhető kockázatok.

Ezt a képet mutatja be a 3. táblázat:

**A működési kockázat jellemzői: súlyosság és gyakoriság (Elder [2006])**

	Alacsony gyakoriság	Magas gyakoriság
Nagy veszteség	Elsődleges kihívást jelentenek Lehetséges hatások: akár teljes tönkremenetel is! Nehéz előrejelezni, más iparági tapasztalatok alkalmazhatók	Nem releváns – ha ilyen típusú a kockázati profil, akkor a jó megoldás az üzleti tevékenység beszüntetése/abbahagyása
Kis veszteség	Elhanyagolható	Enyhébb események Általában erős fenyegetés Könnyen megérthető, mérhető, beárazható Egymással összefügghetnek

A működési kockázati modellezést a kockázati kategória összetettsége (a fentiekben ábrázolt két súlypontúság) rendkívül bonyolulttá teheti, továbbá természetesen szükséges megfelelő minőségű és mennyiségű inputadat, amelyre alapozva megfelelő modellezési bázist tudunk készíteni.

A következő kérdések merülnek fel:

1. Hogyan modellezhető a kockázat komplexitása? Szükséges-e egyes kockázattípusok különálló modellezése?

2. Létezhet-e valamiféle holisztikus megközelítés?

Ezen kérdések teljes körű megválaszolására most nem teszünk kísérletet, de a folyamatban lévő kutatásunk egyik fontos célja ezek megválaszolása a saját modellezési keretünkön belül.

A modellezés kapcsán a szabályozásban nem létezik előírt megközelítés, leginkább „üzleti legjobb gyakorlatról” tudunk beszélni. A működési kockázatmodellezés szakirodalma és a szabályozás által ajánlottak alapján két alaptípusba tudjuk sorolni a modellezési eljárásokat (lásd például Risk Books [2005], CEBS [2006]):

- veszteségeloszlás-alapú megközelítések (LDA, Loss Distribution Approach),
- szcenárióalapú megközelítések (SBA, Scenario Based Approach).

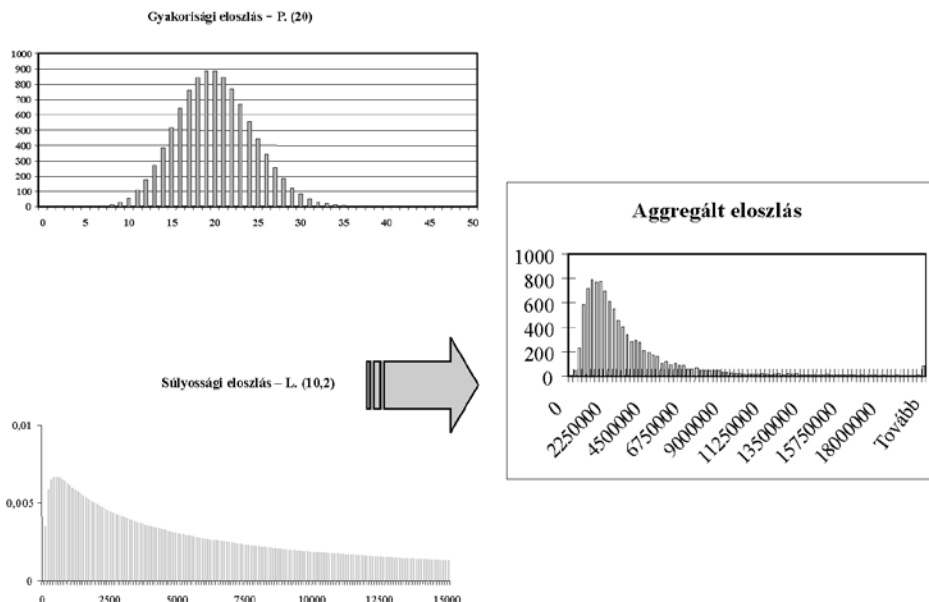
Mindkét megközelítés alapvető célja, hogy a működési kockázatra elegendő tőkét határozzon meg, illetve a működési kockázati profilt és a kapcsolódó kitettséget megfelelően mérje.

Az LDA-módszerek lényege, hogy saját belső veszteségadatok alapján, esetleg azokat külső adatokkal kiegészítve, meghatározunk egy aggregált veszteségeloszlást (az egy időegységre jutó összes veszteség nagyságának eloszlását modellezendő). Az aggregált eloszlás a gyakorisági, illetve súlyossági eloszlásból analitikus (numerikus) vagy Monte-Carlo-szimulációra alapozott konvolúció alapján vezethető le. Formális konvolúció kapcsán kétféle eljárást tudunk megkülönböztetni: diszkrét eloszlások esetén alkalmazhatóak rekurzív eljárások (pl. Panjer-algoritmus), illetve eloszlások diszkretizálásával alkalmazható az ún. gyors Fourier-transzformáció (FFT – Fast-Fourier-Transformation). A gyakorlatban

azonban gyakran alkalmaznak szimulációs eljárásokat; ennek az az oka, hogy a szimuláció felépítése jobban strukturálható feladat, viszont egyúttal jóval időigényesebb eljárásról van szó, és a kockázati mértékek érzékenysége jóval nehezebben vizsgálható (a téma kapcsán jó áttekintést ad *Klugman et al.* [1997]). Az alábbi ábra összefoglalja és példát ad a konvolúciós eljárások alkalmazására:

1. ábra

### Gyakorisági eloszlás és súlyossági eloszlás konvolúciója



Forrás: saját illusztráció

Az LDA-módszerek alkalmazása során először megtörténik az alkalmas eloszlások azonosítása mind a gyakorisági, mind a súlyossági eloszlásokra, majd következhet a realizált veszteségadatok alapján a paraméterbecslés, az illeszkedésvizsgálat és végül a modellválasztás (CEBS [2006] alapján). A szabályozás (BIS [2004], EU [2005]) az AMA-módszer vonatkozó előírásai alapján a 99.9%-os konfidenciaszintnek és 1 éves tartási periódusnak megfelelő kockázati mértéket (VaR mínusz kockázatotott értéket) számítanak az intézmények az aggregált eloszlás alapján. A szakirodalom és a gyakorlat általában a gyakorisági eloszlást szimmetrikus eloszlásokkal, legtöbbször Poisson-eloszlással, míg a súlyossági eloszlást aszimmetrikus, vastag szélű eloszlásokkal, például lognormális vagy extrém értékű (EVT – Extreme Value Theory) eloszlásokkal modellezi.

A másik fontos kvantitatív jellegű módszer, a scenárióalapú elemzés lényege, hogy meghatározunk stresszeseményeket, és azok értékelésével határozzuk meg a működési kockázati kitettséget. A scenárióelemzés alulról felfelé építkező (bottom-up) módszer, míg az LDA felülről lefelé (top-down) haladó megközelítés.

Emellett, mivel a működési kockázat kevésbé kvantifikálható, több pénzügyi intézmény is alkalmaz úgynevezett scorecard, azaz minősítésalapú, kvalitatívabb megközelítést (Riskbooks [2005]).

Jelen tanulmány keretein belül a fentiekben röviden bemutatott (LDA, SBA) megközelítések mögé kívánunk tekinteni. Ezek a módszerek ugyanis a már manifesztálódott, illetve manifesztálódó kockázatot modellezzik, viszont a mögöttes kockázati folyamat elemzése mint modellezési lépés általában kimarad. Mivel célunk, hogy a kockázatkezelési célokra alkalmas modellt alkalmazzunk, ezért a látens kockázati tényezőket próbáljuk meg modellezni, és ebből származtatjuk a veszteségesemény-folyamatot. Ezt a saját modellt mutatjuk be a következőkben.

### 3. SAJÁT SZTOCHASZTIKUSFOLYAMAT-ALAPÚ MODELL – ELSŐ EREDMÉNYEK

A kockázati jelenségekre gyakran alkalmaznak sztochasztikus folyamatokon alapuló modellezést. A kockázatmodellezési szakirodalomban emögött az áll, hogy valamilyen szabályszerűségek alapján, statisztikailag leírható folyamatot követnek a kockázattal összefüggő tényezők.

Mit értünk sztochasztikus folyamat alatt? Röviden  $X$  valószínűségi változó mozgását leíró folyamatot.

Egy sztochasztikus folyamatot négy fő tényező határoz meg (*Karlin–Taylor* [1985]):

- az  $S$  állapotter (  $X$  valószínűségi változók lehetséges értékkeszlete, pl. valós számok halmaza);
- a  $T$  index paraméter (  $X$  valószínűségi változónak azon tulajdonsága, hogy milyen ugrások vannak a folyamatban, pl. ha  $T$  a nemnegatív egész számok halmazát képezi le, akkor beszélünk diszkrét idejű folyamatról);
- az  $X_t$  valószínűségi változók és az azok között fennálló függőségi viszony: szükséges meghatározni a folyamat kezdeti értékét, illetve a valószínűségi változók közötti összefüggést.

Kockázati modellezés során általában két dologra szokták használni a sztochasztikus folyamat alapú modellezést (lásd pl. Cruz [2002] 7. fejezet):

1. *Látens kockázati tényezők alakulása*: ez esetben a kockázati tényezők kritikus szinten túlrakerülése működési kockázati eseményt idézhet elő, amely bizonyos javítási költséggel, illetve veszteséggel jár együtt (Cruz [2002] 7.6–7.9 alfejezetek).

2. *Manifesztálódott kockázati esemény modellezése – kárnagyság alakulása*: az ilyen típusú alkalmazásokban nem fontos az, hogy a kockázati esemény milyen mögöttes tényezők együttállásakor jön létre, és annak milyen az alakulása, hanem már csak a kárfolyamat érdekli a modellezőt. Ennek a megközelítésnek, alkalmazási körnek kiterjedt szakirodalma van a biztosításmatematikai (aktuáriusi) munkákban, lásd például *Michaletzky* [2001].

A két megközelítés közül a látens kockázati tényezők alakulásának, modellezésének kevesebb teret szentel a szakirodalom. Viszont ha a működési kockázat jellemzőit nemcsak mérni szeretnénk, hanem kezelni is, a mögöttes tényezők azonosítása kulcsfontosságúnak tekinthető, mivel a mögöttes kockázati tényezők változtatásával van lehetőség a manifeszt-



tálódó kockázati folyamat változtatására. A következőben egy látens kockázati folyamat modellezésére teszünk kísérletet.

A továbbiakban a működési kockázat jellemzőit egy egyszerűbb modellkeretben vizsgáljuk, amelyet a későbbi kutatások során szeretnénk kiterjeszteni komplexebb problémák vizsgálatára.

A következő alapproblémát modellezzük: hogyan modellezhetők a szerverleállások?

E kérdéskör elemzése során vizsgálatunk középpontjában a rendszerleállások kockázati profilja és a rendszerleállások befolyásoló tényezői állnak.

A probléma operacionalizálása:

Adott egy bankban egy központi szerver, amelynek a teljesítménye ingadozik. Ha egy kritikus tartományon kívül kerül a teljesítmény (kétoldali korlát<sup>9</sup>), rendszerleállást tapasztalunk. Ez utóbbi jelenséggel definiáljuk a katasztrófát, amely bizonyos mértékű veszteséget eredményez.

Kiegészítő problémát jelent az a helyzet, amikor két szervert működtetünk. A második központi szerver az első szerver helyettesítője (úgynevezett forró back-up rendszer). Amennyiben a kritikus teljesítményszinten kívülre került mindkét központi szerver, akkor „együttes katasztrófa” (crash – összeomlás) következik be, és csak bizonyos költségfordítással állítható vissza a rendszer.

Ahhoz, hogy a modellünket felépítsük, az alábbi feltételezéseket, modellelemeket alkalmazzuk:

1. A teljesítmény folyamata egyensúlyi értékhez visszahúzó folyamatot követ (ún. mean-reversion folyamat): az egyensúlyi értékhez mindig visszaigazodik a rendszer, egyensúlyi érték alatti-feletti ingadozások azonban gyakran előfordulnak.
2. Ha az alsó vagy a felső korlátot átlépi a folyamat, akkor katasztrófáról beszélünk.
3. Katasztrófa után az egyensúlyi pontba kerül vissza a folyamat. A kiszolgáló személyzet kijavítja a hibát, és visszaáll az egyensúlyi állapot.
4. A katasztrófa költsége a túllépés mértékével egyenesen arányos.
5. A két szerverrel kapcsolatos kockázati folyamat azonos sztochasztikus folyamatot követ. A két folyamat egymással korrelált, hiszen két azonos berendezésről van szó, a bank működése mindkét szerveregységre kihat<sup>10</sup>. A valóságban a folyamatszabályozás, kockázatkezelés megfontoltabb végrehajtásának köszönhetően, sokszor egy-egy folyamat, egy-egy berendezés, egy-egy személy helyettesítőjét is meghatározzák, annak érdekében, hogy ha egy folyamat, berendezés nem működik, vagy az adott személy nem tudja végrehajtani feladatát, álljon rendelkezésre helyettesítő megoldás (az angol „back-up” kifejezést fordíthatjuk magyarra „háttérmegoldásként”).

A fenti feltételezésekhez illeszkedően, valamilyen átlaghoz visszahúzó (mean-reverting) típusú modell alkalmazása szükséges.

Erre a célra a pénzügyi matematikában jól ismert, gyakran alkalmazott Ornstein–Uhlenbeck-folyamatot (továbbiakban OU-folyamatot) választjuk (elsősorban egyszerűsége miatt), ez a folyamat úgy is ismert a matematikai szakirodalomban, mint Gauss–Markov-folyamat.

9 Megjegyzendő, hogy szakmailag az egyoldali korlát alkalmazása (felső korlát, mint a túlterheltség jellemzője vagy alsó korlát, mint a nagyon alacsony teljesítmény jellemzője) megalapozottabb, viszont feltáró kutatásunk során szimmetrikus korlátozás mellett jobban viselkedő eredményeket vártunk. A jövőben további alkalmazott kutatásainkban inkább aszimmetrikus korlátozást kívánunk használni.

10 Természetesen bizonyos intézkedésekkel (például a szerverek külön helyszínen való elhelyezése) a korreláció mértéke csökkenthető, viszont várhatóan nem iktatható ki teljesen.

Az OU-folyamatok legismertebb pénzügyi alkalmazása a kamatlábak modellezésére használt Vasicek-modell (*Baxter–Rennie* [2002], 197. o.). Az Ornstein–Uhlenbeck-folyamatot azonban először nem a pénzügyekben, hanem neuronok kisülésének modellezésére, állatok mozgására és a rozsdásodás jelensége mögötti látens folyamat modellezésére alkalmazták. Általában azt mondhatjuk, hogy az OU-folyamatot látens folyamatok modellezésére használják, ahol a végkimeneteket ismerjük, de a mögöttes folyamat nem feltárt, így az OU-folyamat teszi lehetővé azt, hogy előrejelzéseket készítsünk (lásd például *Ditlevsen–Ditlevsen* [2006]). A működési kockázat mögötti tényezők is hasonlóak az OU-folyamattal más tudományágakban modellezett jelenségekhez: általában a látens folyamat nem megfigyelhető vagy nem megfigyelt, csak a kockázati esemény válik nyilvánvalóvá.

Az Ornstein–Uhlenbeck-folyamat az alábbi differenciaegyenlettel adható meg (*Finch* [2004] alapján, példafolyamat a 2. ábrán):

$$dP_t = \eta^*(M - P_t) * dt + \sigma * dz \quad (1)$$

A jelöléseket tekintve:

$P_t$ : a  $P$  változó  $t$ -beli értéke,

$\eta$ : a visszahúzás sebessége,

$M$ : a  $P$  folyamat egyensúlyi értéke, modellezésünk során ehhez húz vissza, és a katasztrófa bekövetkezte után innen indul újból a folyamatunk,

$\sigma$ : a szóródási paraméter,

$dz$ : 0 várható értékű, 1 szórású normális eloszlású Wiener-folyamat,

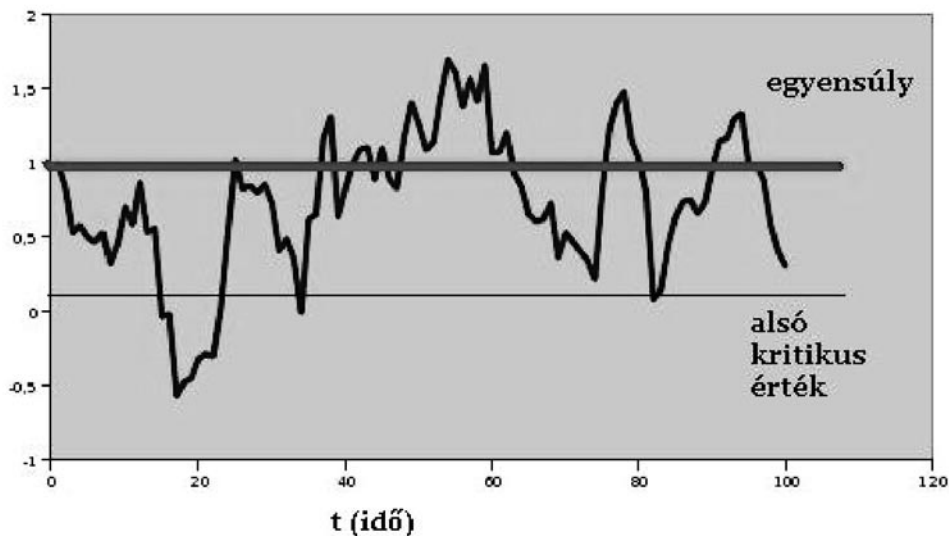
$\rho$ : kettős folyamat esetén definiálunk egy korrelációs együtthatót ( $\rho$ ), ami a két folyamat összehangoltságát mutatja. (Ebben az esetben úgy kezeljük a két folyamat sztochasztikus tagját, hogy az egyik folyamat sztochasztikus tagja  $\sigma * dz$ , a másik folyamat sztochasztikus tagja  $\sigma \cdot (\rho dz + \sqrt{1 - \rho^2} dy)$ , ahol  $dy$  és  $dz$  független, azonos eloszlású, standard normális eloszlású Wiener-folyamat.

Azaz az első folyamat differenciálegyenlete:  $dP_t = \eta^*(M - P_t) * dt + \sigma * dz$ .

A második folyamat differenciál egyenlete:  $dP_t = \eta^*(M - P_t) * dt + \sigma \cdot (\rho dz + \sqrt{1 - \rho^2} dy)$ .

## Ornstein–Uhlenbeck-folyamat illusztrációja

P (folyamatérték)



Matematikailag az általunk modellezendő katasztrófadefiníciónak megfelelő első áttörési idő (first time to hit – FTH) alakulását analitikusan sok szerző elemezte (erre is jó referencia: Ditlevsen–Ditlevsen [2006]). Az OU-folyamatot az jellemzi, hogy nem korlátos folyamat, tehát akár negatív értéket is felvehet. Modellünkben annyiban korlátozzuk ezt, hogy a kritikus intervallum „áttörése” után visszahelyezzük az egyensúlyi értékbe a folyamatot.

### 3.1. Modelleredmények

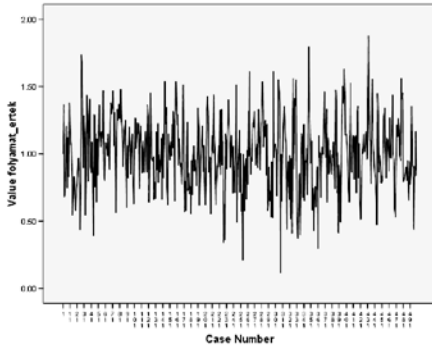
Az alábbiakban alapvető modelleredményeket szeretnénk ismertetni: elemezzük a kockázati folyamatot, továbbá bemutatjuk a katasztrófákhoz kapcsolódó gyakorisági és súlyossági jellemzőit. Először az egyedi folyamatot, majd a kettős folyamatot jellemezzük. Szimulációs módszertant alkalmazunk, a programban első esetben 10 mintát alkalmazunk, 10 ezer „hosszú” időszakra vonatkozó realizációval. Amikor viszont a sokmintás lefutást mutatjuk be, akkor 10 ezer darab mintát veszünk 10 ezer „hosszú” időszakra. A modellezés során az (1)-es képletben ismertetett OU-folyamatot modellezzük. A szimulációs modell alapján készült elemzéseket, számításokat, ábrákat az SPSS 14.0 for Windows programcsomaggal készítettük. Az ábrák mellett feltüntettük az egyedi paraméterbeállításokat; amennyiben egy paraméterbeállítást többször alkalmaztunk, akkor arra a szövegben hivatkozunk. Kutatásunk jelenlegi fázisa exploratív jellegű, így alapvetően néhány tendenciát szeretnénk leíró jellel feltárni, hogy később erre alapozva, stabil modellt alkothassunk.

### 3.1.1. Egyedi folyamat vizsgálata

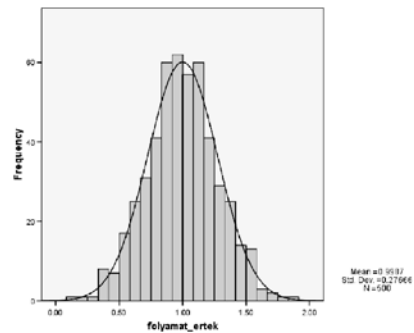
Az alapfolyamatunkra vonatkozó empirikus vizsgálat azt mutatja, hogy a folyamat kimeneteleinek értékét normális eloszlás jellemzi (előzetes várakozásainknak megfelelően).

3. ábra

#### Egy adott paraméterezésű alapfolyamat realizációjának jellemzése



Pstart	Palso critic	Pfalso critic	M	$\eta$	$\sigma$
1	0.25	2	1	0.75	0.25

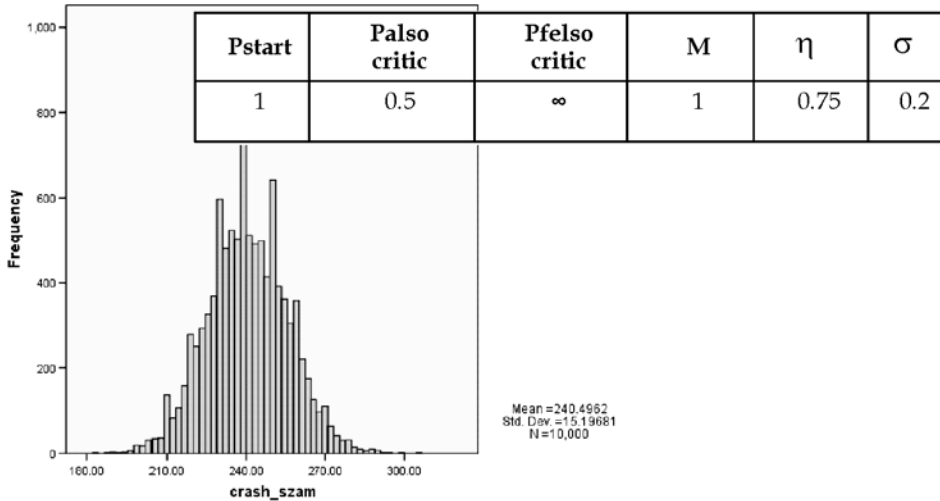


*Forrás:* saját számítás (folyamat lefutása, kimenetek histogramja és a paraméterezés)

A folyamatértékekre a Kolgomorov–Smirnov-statisztikát alkalmazva, azt az eredményt (0.615) kapjuk, hogy a normális eloszlás követése nem vehető el. Természetesen, ha szűkítjük a kritikus értékek korlátait, akkor a folyamatértékek csonkolt normális eloszlást követnének.

Először érdemes megvizsgálni a katasztrófák gyakoriságát. A 3. ábrán bemutatott folyamattal szemben a következő ábrán egy csupán alulról korlátozott folyamat katasztrófa-jellemzőit vesszük szemügyre:

**Katasztrófa gyakorisági eloszlás jellemzése  
adott paraméterezésű folyamat mellett**



Forrás: saját számítás

A működési kockázati szakirodalomban gyakran megjelenik az a feltételezés, hogy a működési kockázati események bekövetkeztét Poisson-folyamat jellemzi (a 2. fejezetben utaltunk erre). Mint láthatjuk a 4. ábrán, a gyakoriságot empirikusan szimmetrikus eloszlás jellemzi. Érdemes tehát tesztelni, hogy modellünk milyen paraméterezése mellett nem vehető el az, hogy a katasztrófa bekövetkezésének gyakorisága Poisson-eloszlást követ (pl. *Bee* [2006]). Az alábbiakban három korláttípus mellett (tágabb kétoldalú, szűkebb kétoldalú, szűkebb alsó és felülről nem lehatárolt korlát) teszteljük a Poisson-féle gyakorisági eloszláshoz való illeszkedést, a 4. ábrán látható paraméterezés mellett:

4. táblázat

**Poisson-illeszkedés tesztelése különböző korláttípusok mellett**

P_also	P_felso	K-S Z	Sigma (2 old)
0.25	2	2.129	0.000
0.5	1.5	0.406	0.996
0.5	99999999	0.794	0.554

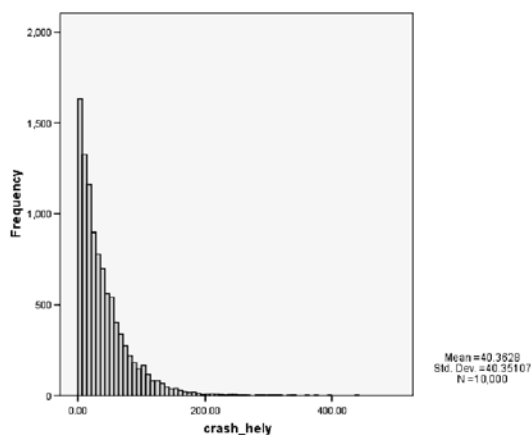
Mint a fenti táblázatból látható, a Kolgomorov–Smirnov Z-statisztika azt mutatja, hogy a középső szűkebb és a harmadik egyoldalú korlátozás mellett nem vehető el a gyakorisági Poisson-eloszlással való jellemzése. A tágabb kétoldalú korlát mellett azonban a Poisson-eloszlás illeszkedése nem fogadható el.

Ahogy már említettük, korábban az OU-típusú folyamatokkal kapcsolatos matematikai szakirodalomban a gyakoriság egy másik fontos aspektusa jelenik meg: az ún. első áttörési idő (first time to hit – FTH). Ditlevsen–Ditlevsen [2006] azt mutatja be, hogy az első áttörés időpontjának valószínűségi eloszlása bonyolulttan fejthető ki analitikus formában. Bizonyos speciális esetekben követ Poisson-eloszlást (amikor az egyensúlyi és kritikus érték nagyon távol van egymástól), míg más speciális esetekben gammaeloszlások bizonyos összege jelenik meg.

A gyakorisági eloszlásokhoz hasonlóan, az egyedi folyamat esetén különböző korlátok mellett vizsgáltuk meg az első katasztrófa bekövetkeztének időpontját. Ennek egyik példáját mutatjuk be az alábbi ábrán:

5. ábra

**Az első áttörési idő valószínűségi eloszlása szoros paraméterbeállítások választása mellett (szoros korlátok: 0.5 és 1.5)**



Forrás: saját számítás

Az 5. ábrán az első áttörési időre ferde eloszlást láthatunk. Az elméleti irodalom alapján alkalmazható Poisson- vagy gammaeloszlás illeszkedése nem megfelelő. Azonban, mint-hogy a Poisson-eloszlás illeszkedett a katasztrófa gyakoriságra, és ismert, hogy Poisson-eloszlásnál az egyes katasztrófaesemények bekövetkezései között eltelt idő exponenciális eloszlással modellezhető, ezért feltehetjük, hogy az empirikus eloszlásnak illeszkednie kell az exponenciális eloszlásra:

5. táblázat

**Első áttörési idejének illeszkedése az exponenciális eloszláshoz**

P_also	P_felso	K-S Z	Sigma (2 old)
0.25	2	2.470	0.000
0.5	1.5	0.736	0.650
0.5	99999999	4.907	0.000

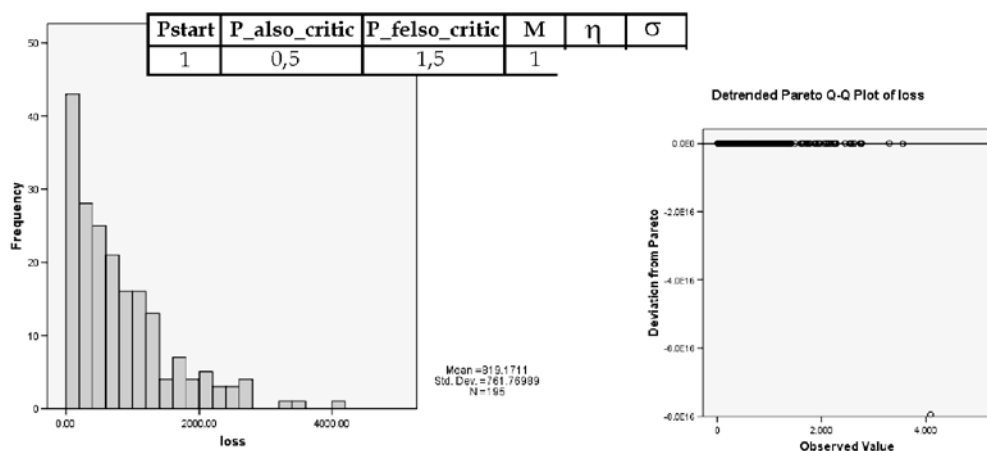
Forrás: saját illusztráció

Mint a fenti statisztikai tesztek (K-S Z-mutató) jelzik, a szorosabb kétoldalú korlát mellett tapasztalható illeszkedés az exponenciális eloszláshoz. A másik két példaesetben azonban ez nem teljesül, így ezt is figyelembe véve, az első áttörési pont eloszlásának illesztése további analitikus kutatást igényel.

A gyakoriság mellett a súlyossági eloszlást is megvizsgáltuk. Feltételezésünkben veszteségmértékként a következő megközelítést alkalmaztuk: a veszteség mértéke az adott alsó vagy felső korlát túllépésének abszolút mértéke, szorozva 10 000 egységgel. A kapott eloszlásértékek megfelelnek a működési kockázati szakirodalomban alkalmazott feltételezésnek, amely szerint a súlyossági eloszlás aszimmetrikus, és vastag eloszlással rendelkezik a működési kockázat területén. Egy kiválasztott paraméterezés esetén a Pareto-eloszlás jó illeszkedést mutat, mint azt a kvantilis-kvantilis ábra mutatja:

6. ábra

### Súlyossági eloszlás és illeszkedése a Pareto-eloszláshoz



Forrás: saját illusztráció

A Pareto-eloszlás egy tipikus balra ferde, vastag eloszlással rendelkező eloszlás, amely jól kifejezi a kisméretű veszteségek gyakoribb, és a nagyméretű veszteség ritkább előfordulását. Az aktuáriusi irodalomban is bevett módon használják – eredetileg a „jólét megoszlásának” jellemzésére – a Vilfredo Pareto által alkalmazott eloszlástípust. Ezen eloszlás sűrűségfüggvényének a következő a képlete:

$$f(x) = \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha+1}} \quad (2),$$

ahol  $\alpha$  az úgynevezett küszöbérték paraméter, míg  $\theta$  a formát mutató paraméter. (Cruz [2002], 53. o.; Michaletzky [2001], 156.o.)

Mint láthattuk, az egyedi folyamatból következő katasztrófa gyakorisági és -súlyossági eloszlás megfigyelt mintái megfelelnek a működési kockázati szakirodalomban megjelenő eloszlásfeltételezéseknek (szimmetrikus gyakorisági eloszlás, ferde, vastag eloszlásszélű súlyossági eloszlás).

### 3.1.2. Kettős folyamat vizsgálata

Az egyedi folyamat mellett megvizsgáltuk a kettős folyamatok jellemzőit is.

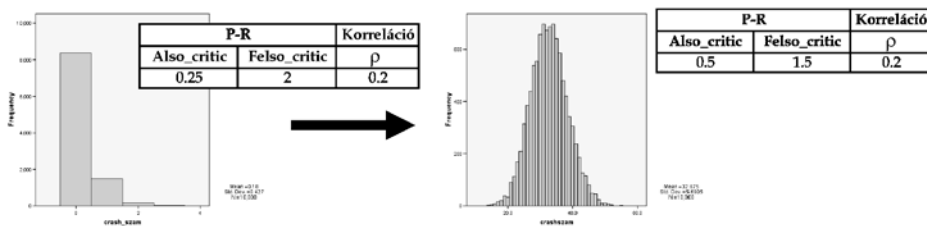
Amennyiben mind az eredeti, mind a helyettesítő megoldás tönkremegy, akkor beszélhetünk együttes katasztrófáról, összeomlásról (crash). Anekdotaként lehetett hallani, hogy a 2001. szeptember 11-i WTC-katasztrófa idején is volt olyan pénzügyi intézmény, amely a Világkereskedelmi Centrum egyik tornyában működött, és a másik toronyban helyezték el a teljes informatikai helyettesítő megoldást. A két torony leomlása után kénytelen volt az intézmény az adatmentésekből helyreállítani funkcióit.

A kettős folyamat esetén is alapvetően azokat a szempontokat vizsgáljuk (katasztrófa gyakoriság, első katasztrófa bekövetkezési ideje, súlyossági eloszlás), mint az egyedi folyamat esetében, viszont a fókuszban az együttes katasztrófa jelensége áll. Első vizsgálódásaink során a két folyamat azonos paraméterezésű, a sztochasztikus taghoz kapcsolódóan építjük be a korrelációs együtthatót.

Triviális módon, amennyiben szélesebb korlátot alkalmazunk, akkor ritkábban fog előfordulni együttes katasztrófa, viszont – mint az alábbi ábrából is látható – szorosabb korlátok mellett a Poisson-eloszlás jól illeszthető az együttes katasztrófa előforduló gyakoriságára.

7. ábra

#### Kettős katasztrófa bekövetkezési gyakorisága szélesebb és szűkebb toleranciakorlát mellett



Forrás: saját illusztráció

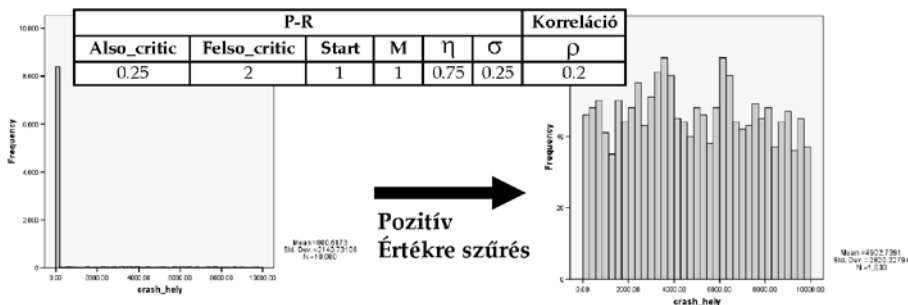
A szorosabb korlát (0.5–1.5) mellett a Poisson-eloszlás illeszkedése a Kolmogorov–Smirnov Z-teszt (0.455-ös érték) alapján nem vehető el.

Az első együttes katasztrófa bekövetkezési idejének valószínűség-eloszlása nem azonosítható vizuális megfigyeléssel. Mint a 8. ábrán látható, szélesebb korlát mellett alig következett be együttes katasztrófa, így az esetek döntő többségében nem is fordult elő együttes katasztrófa (10 000 realizációból több mint 8000 esetben), viszont ha leszűrjük azokat az eseteket, amikor bekövetkezett együttes katasztrófa (8. ábra jobb oldali része), akkor egy kevésbé azonosítható eloszlást látunk.



8. ábra

## Együttes katasztrófa első bekövetkezési idejének eloszlása

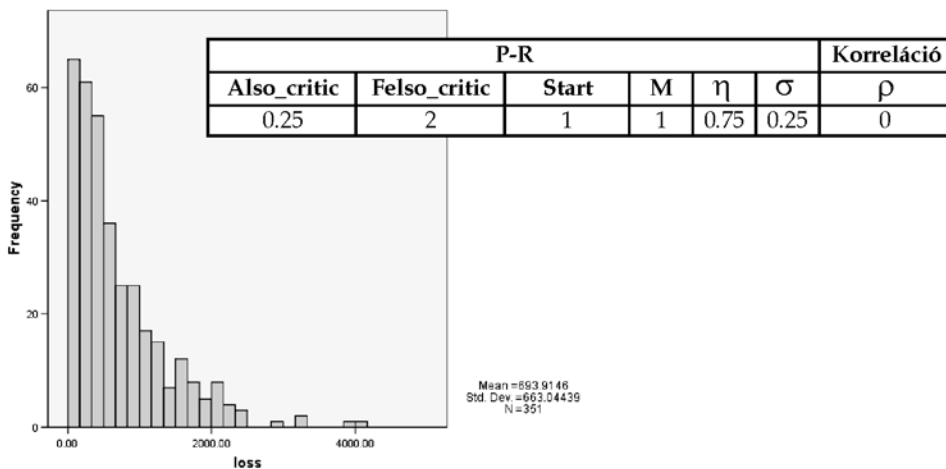


Forrás: saját illusztráció

A másik fontos szempont a katasztrófasúlyossági eloszlás vizsgálata. Ugyanazt a veszteségmérték-definíciót alkalmazzuk, mint az egyedi folyamat esetében: azaz a veszteség mértéke az adott alsó vagy felső korlát túllépésének abszolút mértéke, megszorozva 10 000 egységgel. A kettős folyamat esetében is, ha nem korrelált folyamatokkal dolgozunk, a súlyossági eloszlás Pareto-közelítése jó eredményt ad, mint az alábbi ábrán látható:

9. ábra

## Kettős folyamathoz kapcsolódó súlyossági eloszlás bemutatása adott paraméterezés mellett



Forrás: saját illusztráció

Az SPSS-ben futtatott úgynevezett Wilcoxon-teszt (az eredeti adatsor Pareto-véletlenszámokkal történő összehasonlítása) azt mutatja, hogy a Pareto-eloszlástól való eltérés mértéke statisztikailag nem szignifikáns (kétoldali szigma mutató értéke 0.195).

A korrelációtól való függés a súlyossági eloszlás esetén hangsúlyozottan jelentkezhethet, ezért is bír jelentőséggel a korreláció mértékének megfelelő meghatározása. Ezt a 9. ábrán bemutatott paraméterezésű folyamat esetében két korrelációmérték mellett próbáltuk ki: egy korrelálatlan scenárió és egy közepesnek mondható, 0.5-ös korrelációs mérték mellett. Az eloszlásmomentumok azt mutatják, hogy a korreláció növelésével párhuzamosan nőtt a várható érték, és egyszerre nőtt az eloszlás ferdesége, csúcsossága és szórása:

6. táblázat

**Kettős folyamatra vonatkozó veszteségsúlyossági eloszlás momentumai két különböző korrelációs mérték mellett**

Korreláció	Átlag	Szórás	Ferdeség	Kurtózis
0	693.91	663.04	1.73	3.97
0.5	765.69	734.34	2.05	6.21

Megjegyzés: a paraméterbeállítás azonos a 9. ábrán ismertetettel.

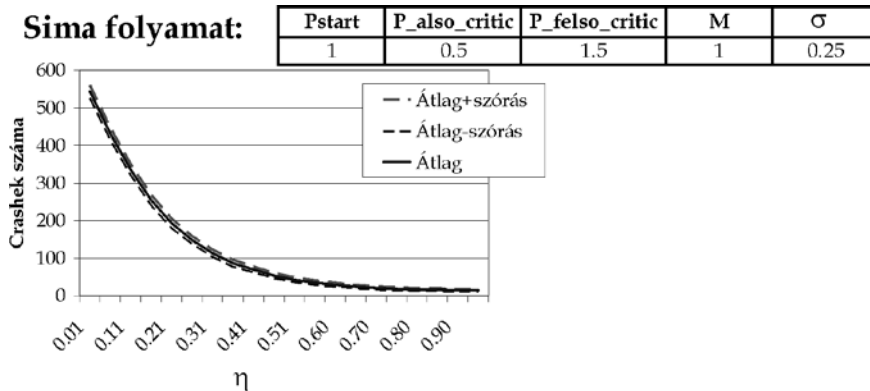
Ez triviális eredménynek tekinthető, de mindenképpen szükséges a korreláció és a súlyossági eloszlás kölcsönhatásának részletesebb vizsgálata.

### 3.1.3. Katasztrófagyakorisági jellemzők paraméterérzékenysége

A modellünk érzékenységét vizsgálandó, a visszahúzási sebesség ( $\eta$ ) és a korreláció ( $\rho$ ) megváltozásának katasztrófagyakoriságra gyakorolt hatását elemezzük. Ezt tekinthetjük szimulációs módszerünk részbeni verifikációjának is, hiszen a következőkben bemutatott eredményeink előzetes várakozásainkat igazolják.

A visszahúzási sebesség növelése egyértelműen csökkenti a katasztrófák számának várható értékét, és ez a jelenség mind az egyedi, mind a kettős folyamatok során érzékelhető:

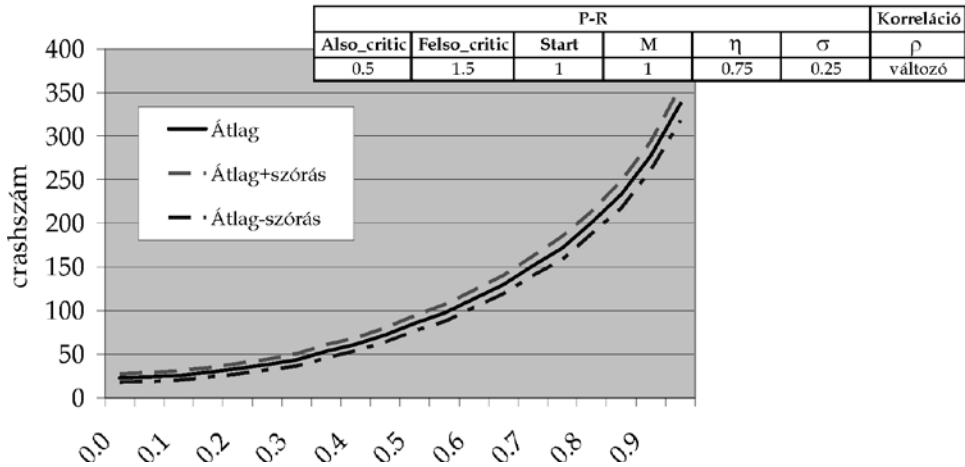
10. ábra



A visszahúzási sebesség növelése csökkenti a katasztrófaelőfordulási gyakoriság várható értékét (kettős folyamat esetén az együttes katasztrófát vizsgáljuk).

A korreláció növelésének hatása a következő: minél nagyobb a két folyamat közötti korreláció, annál gyakoribb az együttes katasztrófa előfordulási gyakoriságának várható értéke. Az alábbi ábrán egy szűkebb korlát melletti realizációsorozatot szemléltetünk különböző korrelációs beállítások mellett:

11. ábra



A korreláció növelése növeli az „együttes katasztrófa” előfordulási gyakoriság várható értékét

Természetesen szükséges a későbbi kutatásaink során a paraméterérzékenységek részletesebb vizsgálata, a visszahúzási sebesség és a korreláció mellett a többi inputparaméterre való érzékenység elemzése mindenképpen hasznos lenne.

### 3.2. A működési kockázat előrejelzése

A kockázatelemzés egyik fontos célja a kockázati profil alapján történő előrejelzés. A múltbéli adatok alapján a jövőbeni kockázatok felmerülésére készülünk fel. Mint cikkünk 2. részében is bemutattuk, a működési kockázatelemzés egyik kulcspontja az alacsony gyakoriságú – magas hatású (LFHI) események modellezése. Ebben az esetben a kockázat-előrejelzés nehézséget jelent. A kockázati események (katasztrófák) előrejelzésére alapvetően két alaplómódszert különböztetünk meg<sup>11</sup>:

<sup>11</sup> Természetesen a múltbéli adatokból való „extrapoláció” történhet sokféleképpen, a felsoroltaktól eltérő módon (mozgóátlagolás, simítási technikák és egyebek), de most két alaplómódszert vizsgálunk meg.

1. *Kockázati események múltbéli előfordulása alapján:* megnézzük, hogy a múltban milyen gyakorisággal és milyen súlyossággal következtek be katasztrófaesemények<sup>12</sup>. Ennek alapján feltételezzük, hogy a múltbéli kockázati paraméterek megfelelőek előrejelzésre is. (Hitelkockázati nemteljesítési valószínűség előrejelzésénél ezt nevezi a magyar kockázatkezelési „köznyelv” „k/n” módszernek.) A megközelítés lényege, hogy egyetlen kisminta alapján becsülünk, és naiv előrejelzéssel élünk (a múlt megegyezik a jövővel).

2. *Látens kockázati folyamat feltárása a múlt alapján:* elemezzük a múltbéli kockázati eseményeket, előállítjuk a látens kockázati folyamatot, és ennek alapján végezzük az előrejelzést, mégpedig szimuláció segítségével. A látens kockázati folyamatot futtatjuk le a modellezési feltevéseink szerint, aztán pedig a szimulált eredmények alapján adjuk meg a kockázati tényezőkre vonatkozó előrejelzést. Történhet az, hogy sokszor lefuttatjuk a „jövőt”, vagy pedig egy nagyon hosszú periódusra futtatjuk le a szimulációkat<sup>13</sup>.

Megjegyezhetjük, hogy klasszikus értelemben vizsgálatunk tárgya igazából nem is az előrejelzés, hanem – feltételezve a kockázati profil stabilitását – a minél jobb becslés a cél.

Elemzésünkben a következő alapfeltevésekből indulunk ki az előrejelzési módszerek összehasonlításakor<sup>14</sup>:

1. Ismerjük a folyamatunk egyszeri lefutását (100, 250, illetve 1000 hosszú időszakra), amely egy előre definiált OU-folyamat alapján egyszeri realizációt jelent.

2. A jövőben fennmarad a látens OU-folyamat stabilitása, és ugyanazon paraméterekkel megy végbe a folyamat a jövőben is, ahogy az eddigiekben is a kismintás vizsgálatra.

A továbbiakban külön végzünk előrejelzési vizsgálatokat egyes folyamat és kettős folyamat esetében is.

### 3.2.1. Egyes folyamatra vonatkozó kockázat-előrejelzés

Elemzésünk során két paraméterbeállítást vizsgálunk:

1. *Szigorúbb katasztrófa-kritérium* (azaz ritkábban előforduló események) melletti elemzés:

Alsó küszöbérték 0, míg a felső küszöbérték 2. A folyamat induló értéke 1, és az egyensúlyi érték is 1. A visszahúzó paraméter ( $\mu$ ) értéke 1, a szórásparaméter ( $\sigma$ ) értéke 0.25.

2. *Tágabb katasztrófa-kritérium* (azaz gyakrabban előforduló események) melletti elemzés:

Alsó küszöbérték 0.4, míg a felső küszöbérték 1.6 (szűkebb, szimmetrikus sáv). A folyamat induló értéke 1, és az egyensúlyi érték is 1. A visszahúzó paraméter ( $\eta$ ) értéke 0.75 (a folyamat lassabban ér vissza az egyensúlyi pontjára), a szórásparaméter ( $\sigma$ ) értéke 0.25.<sup>15</sup>

Célszerű először a két paraméterezés gyakoriságra vonatkozó eredményeit összehasonlítani, többféle mintavételi és futtatási eljárásra:

12 A katasztrófaesemények múltbéli adatok alapján történő feldolgozásában hangsúlyozott jelentősége lehet a külső veszteségadatok (pl. HunOR Magyar Működési Kockázati Adatbázis vagy egyéb adatbázisok) felhasználásának.

13 A szimulációs szakirodalomban megjelenik az úgynevezett „batch mean” technika is; ennek során egy hosszabb időszakra végezzük a szimulációt, és ezt a hosszú időszakot bontjuk fel kötegekre (batchekre).

14 Természetesen a további kutatások során az egyszerűsítő feltételezéseket, amennyire lehetséges, szükséges feloldani.

15 A paraméterbeállítások önkényesnek mondhatóak, leginkább azt a célt szolgálják a különböző értékválasztások, hogy jól szemléltethető eredményeket kapjunk.

**Gyakorisági előrejelzésre vonatkozó szimulációs eredmények  
egy folyamat esetében, két különböző paraméterbeállításra**

1. paraméterezés

Szimuláció száma	Lefuttatott minták száma	Folyamat hossza (T)	Crashek-száma (összesen a mintákon)	Várható crash valószínűsége
1	1	100	0	–
2	1	250	0	–
3	1	1000	0	–
4	10000	100	56	0.006%
5	10000	250	175	0.007%
6	10000	1000	629	0.006%
7	1	10000	1	0.010%
8	1	100000	12	0.012%

2. paraméterezés

Szimuláció száma	Lefuttatott minták száma	Folyamat hossza (T)	Crashek-száma (összesen a mintákon)	Várható crash valószínűsége
1	1	100	2	2.000%
2	1	250	4	1.600%
3	1	1000	18	1.800%
4	10000	100	19234	1.923%
5	10000	250	48163	1.927%
6	10000	1000	192031	1.920%
7	1	10000	190	1.900%
8	1	100000	1915	1.915%

Forrás: saját számítás

A gyakoriságot tekintve, az első paraméterbeállításnál a kismintából történő becslés nem lehet helytálló, hiszen nem is következik be katasztrófaesemény, így egyértelműen alulbecsüljük kockázatainkat, hiszen attól, hogy az eddigiekben nem következett be az esemény, a kockázati kitétszégünk nem zérus.

A szimulációs módszerekkel konzervatívabb eredményekhez jutunk, ez azt is jelenti, hogy azok nélkül gyakran alulbecsülhetjük a kockázatainkat. A szimulációs módszerek statisztikai alkalmazhatóságának alapját a valószínűségszámításban a Glivenko–Cantelli-tétel

jelenti. Ennek lényege a következő: a megfigyelt kimenetekre vonatkozó empirikus eloszlásfüggvény 1 valószínűséggel, egyenletesen tart a mögöttes, valódi eloszlásfüggvényhez.

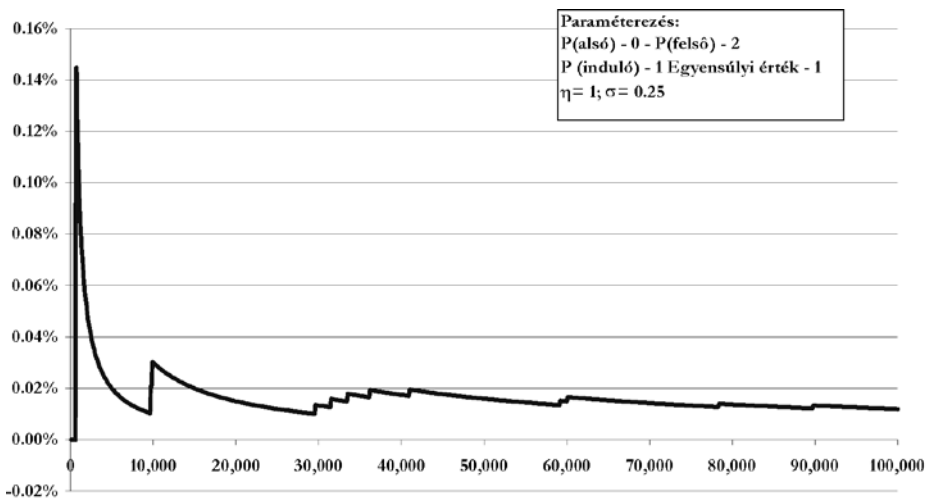
Formálisan mutatva:  $P(\sup_t | F_n^*(t) - F(t) | \rightarrow 0) = 1$ , ahol \*-gal jelöljük az empirikus eloszlást, és külön jelölés nélkül az elméleti eloszlást<sup>16</sup>, ahol  $\sup$  a szuprémum matematikai kifejezés rövidítése (felső korlátok legkisebbike),  $F(t)$  a  $t$  valószínűségi változó elméleti eloszlásfüggvénye,  $F_n^*(t)$  a  $t$  valószínűségi változó  $n$  realizáció melletti empirikus eloszlásfüggvénye,  $P(x)$  pedig az adott  $x$  bekövetkezési valószínűségét jelöli.

A második paraméterbeállítás mellett viszont, amikor gyakoribbak a katasztrófák, akkor kismintás megfigyelés alapján picit túlbecsüljük a kockázatot.

Hosszabb időszak ( $T=100,000$  egység) során azt is megnézhetjük, hogy a hibaarány (katasztrófaesemények száma/eltelt időszak) a megfigyelési periódus bővülésével hogyan alakul. Amennyiben a szigorú kockázati definíciót nézzük, akkor a hibaarány tekintetében furcsa konvergencia figyelhető meg. A lefutás elején még nagyobb az ingadozás, de aztán egyértelmű az eredmény konvergenciája (l. 12. ábra).

12. ábra

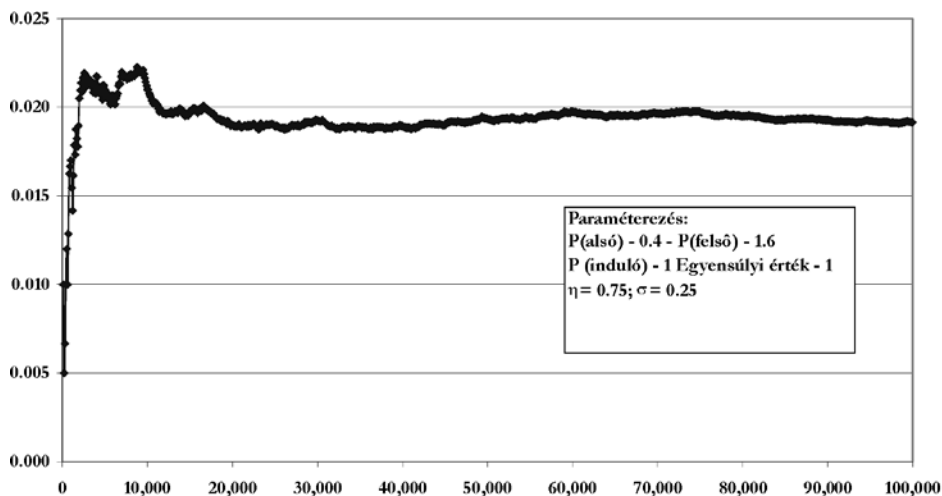
### Hibaarány alakulása (elfogadható tartomány: 0–2)



Forrás: Hiba- (katasztrófa-) arány alakulása a mintanagyság függvényében, tágabb katasztrófa-definícióra (saját számítás)

Tágabb katasztrófa-definíció esetén viszont ez a konvergenciapálya egyértelműbb, és időben hamarabb beáll egyfajta egyensúlyi szint (l. 13. ábra).

## Hibaarány alakulása (elfogadható tartomány: 0,4–1,6)



Forrás: Hiba- (katasztrófa-) arány alakulása a mintanagyság függvényében, szűkebb katasztrófadefinícióra (saját számítás)

Az egy katasztrófaesemény bekövetkezése esetén felmerülő veszteségnagyság előrejelzése is érdekes probléma. A veszteség továbbra is arányos a toleranciaszintből való kilépés mértékével. A súlyossági eloszlásra vonatkozó fontosabb paramétereket (momentumokat) az alábbi 8. táblázat tartalmazza:

8. táblázat

**Súlyossági előrejelzésre vonatkozó szimulációs eredmények  
egyes folyamat esetében, két különböző paraméterbeállításra**

1. paraméterezés

Szimuláció száma	Minta-szám	T	Átlag	Szórás	Ferdeség	Csúcsosság
1	1	100	Nincs katasztrófa	Nincs katasztrófa	Nincs katasztrófa	Nincs katasztrófa
2	1	250	Nincs katasztrófa	Nincs katasztrófa	Nincs katasztrófa	Nincs katasztrófa
3	1	1000	Nincs katasztrófa	Nincs katasztrófa	Nincs katasztrófa	Nincs katasztrófa
4	10000	100	479.34	462.60	2.17	5.91
5	10000	250	496.77	538.41	2.56	8.75
6	10000	1000	553.02	507.58	1.52	3.05
7	1	10000	111.15	0 (1 db katasztrófa)	0 (1 db katasztrófa)	0 (1 db katasztrófa)
8	1	100000	642.29	616.82	0.67	-0.74

## 2. paraméterezés

Szimuláció száma	Minta-szám	T	Átlag	Szórás	Ferdeség	Csúcsosság
1	1	100	1019.16	114.67	Katasztrofaszám < 3	Katasztrofaszám < 4
2	1	250	664.61	417.10	0.62	1.19
3	1	1000	1207.82	1137.91	1.60	2.84
4	10000	100	865.24	806.35	1.60	3.21
5	10000	250	867.48	799.88	1.59	3.35
6	10000	1000	877.29	784.18	1.52	2.87
7	1	10000	819.65	766.29	1.37	1.35
8	1	100000	849.85	790.31	1.74	4.55

Forrás: saját számítás

A súlyosság esetén a gyakorisághoz hasonló az előrejelzés eredménye. A kis gyakoriságú katasztrófánál alulbecslés van a kismintából, gyakoribb eseményeknél a kismintából viszont túlbecslést produkáltunk (az értékelés alapját a momentumok adják). Amennyiben viszont azon szimulációkat hasonlítjuk össze, ahol tízezer kisebb mintára történt a vizsgálat, láthatunk a várható veszteségben némi növekedést.

### 3.2.2. Kettős folyamatra vonatkozó kockázat-előrejelzés

Természetesen érdemes megvizsgálni a kettős katasztrófák bekövetkezésére vonatkozó előrejelzések tulajdonságait is. A kettős katasztrófa gyakoriságára vonatkozó előrejelzés kismintából nehézséget jelent.

Két paraméterbeállítását alkalmazunk ebben az esetben is, amelyek a korreláció szintjében térnek el:

#### 1. Két erősen korrelált folyamat:

Alsó küszöbérték 0.1, míg a felső küszöbérték 1.9. A folyamat induló értéke 1, és az egyensúlyi érték is 1. A visszahúzó paraméter ( $\mu$ ) értéke 0.75, a szórásparaméter ( $\sigma$ ) értéke 0.25. A korreláció mértéke ( $\rho$ ) 0.8.

#### 2. Két gyengén korrelált folyamat:

Alsó küszöbérték 0.1, míg a felső küszöbérték 1.9. A folyamat induló értéke 1, és az egyensúlyi érték is 1. A visszahúzó paraméter ( $\mu$ ) értéke 0.75, a szórás paraméter ( $\sigma$ ) értéke 0.25. A korreláció mértéke ( $\rho$ ) 0.1.

A gyenge korrelációnál várakozásainknak megfelelően ritka a kettős katasztrófa (crash-gyakoriság). Az eredményeinket az alábbi 9. táblázat foglalja össze:



**Előrejelzésre vonatkozó szimulációs eredmények kettős folyamat esetében,  
két különböző paraméterbeállításra**

1. paraméterbeállítás (korreláció=0.8)

Szimuláció száma	Lefuttatott minták száma	Folyamat hossza (T)	Kettős crashek száma (összesen a mintákon)	Várható crash valószínűsége
1	1	100	0	–
2	1	250	0	–
3	1	1000	1	0.1000%
4	10000	100	92	0.0092%
5	10000	250	242	0.0097%
6	10000	1000	1066	0.0107%
7	1	10000	1	0.0100%
8	1	100000	11	0.0110%

2. paraméterbeállítás (korreláció=0.1)

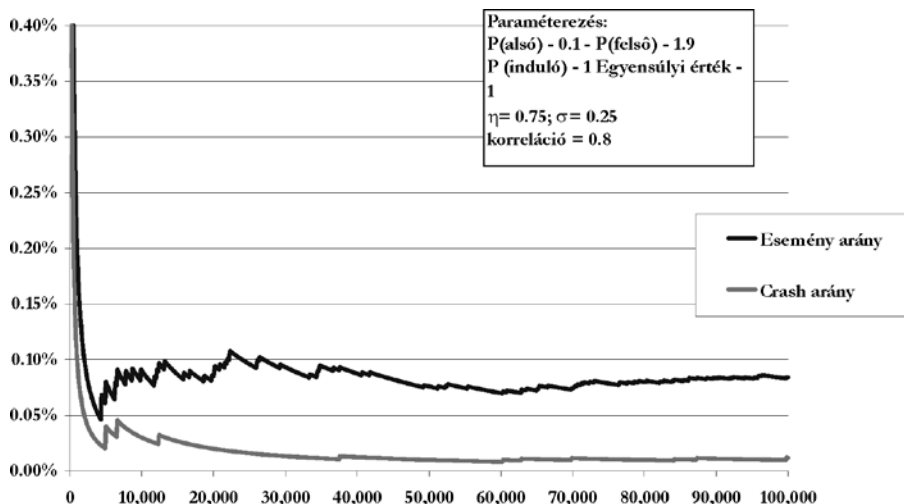
Szimuláció száma	Lefuttatott minták száma	Folyamat hossza (T)	Kettős crashek száma (összesen a mintákon)	Várható crash valószínűség
1	1	100	0	–
2	1	250	0	–
3	1	1000	0	–
4	10000	100	0	–
5	10000	250	3	0.0001%
6	10000	1000	8	0.0001%
7	1	10000	0	–
8	1	100000	0	–

Forrás: saját számítás

A kettős folyamat esetében is megvizsgáltuk a katasztrófa bekövetkezési arányának alakulását időben (mind egyes, mind kettős katasztrófára). Amennyiben szorosabb a korreláció, akkor a hibaarány nagyobb ingadozása és a folyamat későbbi beállása figyelhető meg. Kisebb folyamathossz esetén még nagyobb az ingadozás, de aztán egyértelmű konvergenciát tapasztalunk.

14. ábra

## Hibaarány alakulása (elfogadható tartomány: 0,1–1,9)

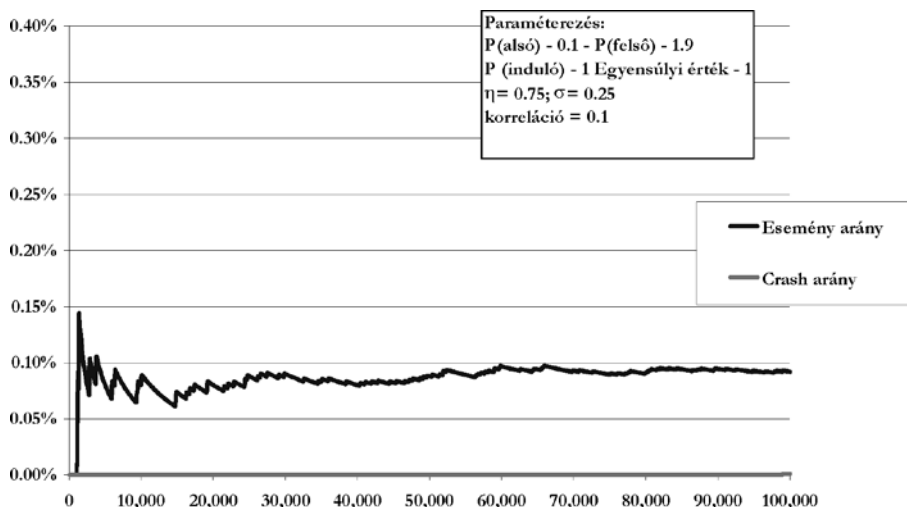


Forrás: Hiba- (katasztrófa-) arány alakulása a mintanagyság függvényében, kettős katasztrófa esetében, szorosabb korreláció mellett (saját számítás)

Tágabb katasztrófadefiníció esetén viszont ez a konvergenciapálya egyértelműbbnek tűnik, és hamarabb beáll a folyamat (15. ábra):

15. ábra

## Hibaarány alakulása (elfogadható tartomány: 0,1–1,9)



Forrás: Hiba- (katasztrófa-) arány alakulása a mintanagyság függvényében, kettős katasztrófa esetében, gyengébb korreláció mellett (saját számítás)

A fenti ábrán látszik, hogy a crash-arány stabilan 0 marad. Így alacsony korreláció mellett érdemes még nagyobb mintát választani, bár ebben az esetben a 0-tól való eltérés szignifikanciája gyaníthatóan nagyon csekély lesz.

## ÖSSZEZÉS, KUTATÁSI IRÁNYOK

A cikkünkben bemutatott eredmények a feltáró fázisban lévő kutatásunk első eredményeit ismertetik. Megállapíthatjuk, hogy a működési kockázati szakirodalomban megjelenő előfeltevésekkel a modelleredményeink összhangban vannak. A gyakorisági eloszlás a Poisson-eloszlással jól közelíthető; még a Pareto-eloszlás alkalmazható a veszteségsúlyossági eloszlásra<sup>17</sup>. A kapcsolódó matematikai szakirodalomban gyakran szereplő „első áttörési idő” (first hitting time) eloszlása komplexitást mutat empirikus vizsgálatainkban. Megvizsgáltuk a modellalapú előrejelzési lehetőségeket, és azt tapasztaltuk, hogy a múltbéli adatokból, kismintán építkező módszer torz értékeket (túl- vagy alulbecslést) eredményezhet.

Kutatásunk szempontjából szükséges az elméleti matematikai szakirodalom részletesebb feltárása annak érdekében, hogy analitikus, elméleti eloszlásokat azonosíthassunk veszteségsúlyosságra, katasztrófyagyakoriságra és első áttörési időre vonatkozó eloszlásokkal való összehasonlításra. Szükségesnek tartjuk a paraméterérzékenységek részletesebb vizsgálatát. Fontos elemzési téma továbbá a gyakorisági és súlyossági eloszlás alapján aggregált, egy időszakra vonatkozó összveszteséget kifejező eloszlás meghatározhatósága, a modellünkben kalkulálható kockázatos érték (tőkekövetelmény) meghatározására. A modellünk igazi gyakorlati hasznát pedig azt jelentené, ha a realizált veszteségadatokból (előfordulási pontokból) tudnánk becsülni a látens kockázati folyamatot, majd ennek alapján előrejelzést is készíthetnénk, illetve folyamat alapú modellünket egy-egy kockázati kategóriára (például csalási események, informatikai rendszerleállások, ATM-ek hibái) tudnánk alkalmazni. Modellünk validitását pedig majd azt tudja biztosítani, ha valódi banki tapasztalatokkal vethetjük össze modellünk eredményeit.

## IRODALOMJEGYZÉK

- BAXTER, M.–RENNIE, A. [2002]: Pénzügyi kalkulus, Typotex, Budapest
- BEE, MARCO [2006]: Estimating the parameters in the Loss Distribution Approach: How can we deal truncated data in „The advanced measurement approach to operational risk”, Risk Books, London
- BIS [2004]: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework, 2004. június 26., internetes elérhetőség: <http://www.bis.org/publ/bcbs107.pdf> (2007. január 2.)
- CEBS [2006]: GL10 – Guidelines on the implementation, validation and assessment of Advanced Measurement (AMA) and Internal Ratings Based (IRB) Approaches, [www.c-eps.org](http://www.c-eps.org)
- CRUZ, MARCELO [2002]: Modelling, measuring and hedging operational risk, John Wiley & Sons, Chichester
- DITLEVSEN, SUSANNE–DITLEVSEN, OVE [2006]: Parameter estimation from observation of first passage times of the Ornstein-Uhlenbeck Process and the Feller process, Conference paper: Fifth Computational Stochastics Mechanics Conference, Rhodos, 2006. június

17 A Pareto-eloszlás mellett a banki gyakorlatban gyakran lognormális vagy Weibull-eloszlást illesztnek a súlyosságra. A megfelelő eloszlás kiválasztásához szükséges illeszkedésvizsgálati technikák (goodness of fit – GOF-tesztek) alkalmazása.

- ELDER, JAMES [2006]: Using scenario analysis to estimate Operational Risk Capital, London, Operational Risk Europe Conference
- Európai Unió [2006]: 2006/48/ EK irányelv (2006. június 14.) a hitelintézetek tevékenységének megkezdéséről és folytatásáról (átdolgozott szöveg), EGT-vonatkozású szöveg
- FINCH, STEVEN [2004]: Ornstein–Uhlenbeck Process, elérés: <http://algo.inria.fr/resolve/ou.pdf>
- JORION, PHILIP [1999]: A kockázatos érték, Panem Könyvkiadó
- KARLIN, S.–TAYLOR, M. H. [1985]: Sztochasztikus folyamatok, Gondolat Kiadó, Budapest
- KIRÁLY, JÚLIA [2005]: Kockázatos érték-számítások, előadásorozat, Budapesti Corvinus Egyetem
- KLUGMAN, S.– PANJER, H.–WILMOT, G. [1997]: Loss Models, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, New York
- MICHALETZKY, GYÖRGY [2001]: Kockázati folyamatok, ELTE Eötvös kiadó, Budapest
- ORX [2006]: ORX reporting standards, internetes elérhetőség: <http://www.orx.org/lib/dam/1000/ORRS-Feb-07.pdf>, 2007. július 26.
- PSZÁF [2005]: Az új tőkeemfelelési szabályozással kapcsolatos felkészülésre vonatkozó kérdőívre beérkezett válaszok feldolgozása, Budapest, [www.pszaf.hu](http://www.pszaf.hu)
- Risk Books [2005]: Basel II handbook for practioners, Risk Books, London
- VEERARAGHAVAN, M. [2004]: Stochastic processes, előadásjegyzet, <http://www.ece.virginia.edu/~mv/edu/715/lectures/SP.pdf>