

ALEXANDER F. BOOGERT – GAÁL SZABOLCS

ELEKTROMOS ENERGIA OPCIÓK ÁRAZÁSA

Cikkünk célja kettős: egyrészt az elektromos energia piacok (különös tekintettel a holland piacra) lényegesebb sajátosságainak bemutatása, másrészt egy ugró diffúziós modellen alapuló opcióárazó algoritmus ismertetése. A spot árfolyamot ugró diffúziós Markov folyamattal modellezzük, ahol az ugrások nagyságának eloszlását dupla exponenciális sűrűségfüggvény adja meg. Levezetjük az árazáshoz használt parciális integro-differenciálegyenletet, amelyet Fourier-féle sorfejtés módszerével oldunk meg. Eljárást adunk a folyamat paramétereinek becslésére is.

BEVEZETÉS

E fejezetben rövid betekintést adunk az árampiaci liberalizáció folyamatába és a spot elektromos energia árfolyamok elméletébe (továbbiakban spot árfolyam). Elsőnek a deregularizációs folyamatot ismertetjük, külön figyelmet szentelve a holland piaci liberalizációnak és az egynapos forward árfolyamok (day-ahead forward prices) megállapítása módjának. Ezután azt tárgyaljuk, hogy miért különbözik az energiaderivatívok modellezése egyéb pénzügyi derivatívok modellezésétől. Végül a holland spot piacról vett konkrét példákon keresztül röviden ismertetjük a spot árfolyamok főbb ismérveit: a szezonalitást, a nagy ugrásokat és az átlaghoz való visszahúzást (mean reversion).

⇒ Az elektromos energia piacok deregularizációja

Az elektromos energia piacokat világszerte liberalizálják: legelőször Chilében (1982) és Új-Zélandon (1987) majd Nagy-Britanniában (1990) és Norvégiában (1991). A 96/12-es uniós direktívában [EP97] az Európai Unió megfogalmazta a piaci liberalizáció szükségességét. A direktíva szerint a piacokat 1999-re, 2000-re és 2003-ra liberalizálni kell azon fogyasztók részére, amelyek éves energia szükséglete rendre meghaladja a 40, 20 és 9 GWh-t. Ezzel összhangban egy uniós irányelv [EP01] a teljes piaci liberalizációt teszi szükségessé 2005-re. A Hollandia számára fontos országok közül Németország a tervezett menetrend szerint teljesíti ezeket az elvárásokat, míg Franciaor-

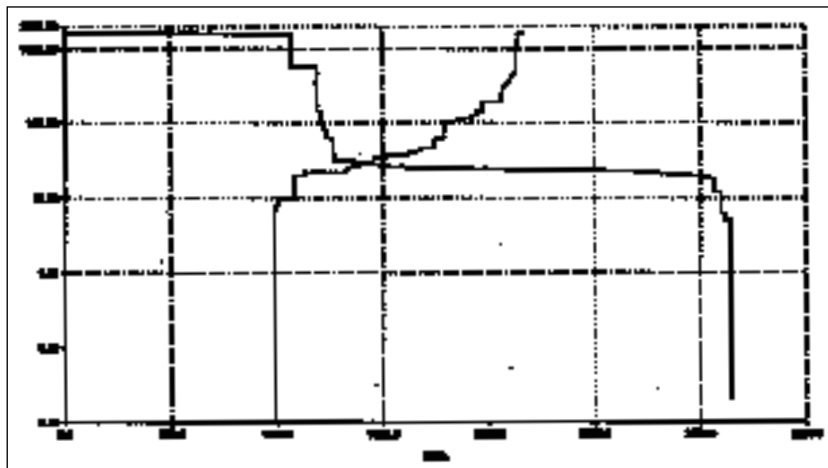
szág késlekedik az implementációval. A deregularizáció országról-országra különböző módon történik, amelyet nagyrészt a tulajdonosi struktúrák különbözősége magyaráz. A kormányzat az elektromos energia előállítását liberalizálja, míg az (országos) gerincezeték állami tulajdonban marad: például Hollandiában a gerincezeték az állam által birtokolt TenneT tulajdonában van. A hálózat kisebb részei azonban lehetnek magántulajdonban: erre példák a holland Nuon és Essent közművállalatok. A utóbbi tulajdonában vannak egyebek mellett az észak-brabanti és limburgi hálózat kisebb részei. A vertikálisan integrált Essent Hollandiában speciális piaci pozícióban van: az energia-előállításban, -továbbításban, – nagy- és kiskereskedelemben is aktív piaci szereplő.

A **holland piaci liberalizáció** három fázisban zajlik. Az első fázisban 1999-ben a nagyfogyasztók (ún. phase-one fogyasztó-

tók) részesültek a liberalizáció előnyeiből. Őket követték 2002-ben a közepes nagyságú (ún. phase-two) fogyasztók, míg a háztartások jelenleg csak akkor választhatnak szabadon a szállítók közül, ha környezetkímélő módon előállított elektromos energiára térnek át. 2004-ben a holland piacot teljesen liberalizálják. A holland piaci liberalizáció **fő célja az energia árának csökkentése**: a háttérben az az elgondolás állt, hogy a szabadpiacon az áram előállítása hatékonyabban történik és így a végfogyasztó számára olcsóbb lesz az elektromos energia. A liberalizáció eredményét a 3. ábrán szemléltetjük. A liberalizáció eredményeként az elektromos energiával mint áruval egyre nagyobb volumenben kereskednek. A következőkben megmagyarázzuk, hogy miért nem alkalmazhatók változatlan formában azok a technikák, amelyeket az egyéb árukra érvényes származékos termékek árazására fejlesztettek ki.

1. ábra

APX keresleti és kínálati görbék, 2003. I. 17, 14 óra



⇒ Spot árfolyam

Hollandiában a „spot” kereskedés az Amszterdami Áramtőzsdén (Amsterdam Power Exchange, APX) zajlik, amely egy-napos forward piac. Az egyszerűség kedvéért az APX-en jegyzett, egy-napos forward árfolyamokat a továbbiakban „spot árfolyamnak” nevezzük. A spot árfolyamokat a TenneT határozza meg, miután az erőművektől megkapta a másnapra vonatkozó eladási ajánlati árakat, így a TenneT végzi a kereslet és kínálat összehangolását. Ehhez nyújtanak segítséget a keresleti-kínálati görbék. (1. ábra.) Látható, hogy példánkban az egyensúlyi árfolyam 28,28 euro/MWh-s szintnél alakul ki.

Kínálati oldalon beszélhetünk alap- (base load) közép- (shoulder) és csúcsterhelésről (peak load). Az alapterhelést kiszolgáló erőművek általában egész nap üzemelnek, míg a csúcsterhelést kiszolgálók csak a „csúcshórákban” (peak hours)

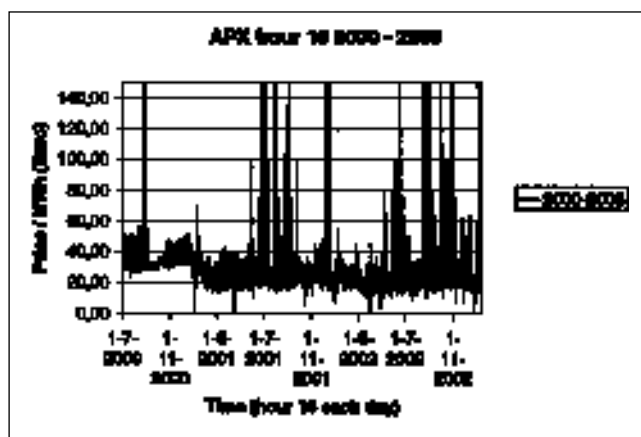
vagy akkor, ha más erőművi egységek meghibásodnak.

Keresleti oldalon figyelemre méltó a keresleti görbe hosszu, vízszintes szakasza. A nagy árrugalmasság miatt a kereslet még viszonylag kis árváltozások esetén is 1200 MWh-ról 3200 MWh-ra nőhet. Ezt azzal magyarázhatjuk, hogy a holland erőművek nagyrészt gáztüzelésűek, így ha a spot árfolyam csökken, az erőmű könnyen beszüntetheti az energia előállítását. Az spot árak mellett természetesen a szezonális is meghatározza a keresletet: a napi időjárás szerepe döntő lehet.

Az elektromos energia azért különbözik a többi árutól, mivel kis mennyiségben csak körülményesen (például ólomakkumulátorok), nagy mennyiségben pedig egyáltalán nem lehet tárolni. Ennek az a következménye, hogy a **kereslet minden pillanatban egyensúlyban van kínálattal**. Ha mégsem, az nagy áringadozásokat és esetenként több száz százalékos árugrá-

2. ábra

APX 16 óra



sokat okozhat. Ha ehhez még hozzáveszünk a szezonaritást, könnyen beláthatjuk, hogy a spot árfolyam modellezése igen nehéz. Az opciók árazása ezért problémás, hiszen a hagyományos arbitrázs alapú árazás a mögöttes termék tárolhatóságán alapul. Erre a következőkben a mértékcseré tárgyalásánál még visszatérünk.

⇒ A spot árfolyamok jellemzői

A spot árfolyam esetén megfigyelhetjük az átlaghoz való visszahúzást egy, a termelési költségeket kissé meghaladó átlagos árszint felé. A (hosszú távú) átlag a kereslet-kínálat egyensúlyaként alakul ki: magasabb árak esetén új termelők lépnek a piacra, amely az árakat leszorítja, míg alacsonyabb árak esetén termelők hagyják el a piacot, amely a kínálat csökkenésén keresztül az árakat növeli.

A hosszú távú hatásokon kívül a rövid távú hatások (például szokatlanul meleg idő vagy erőművek meghibásodása) szerepe is jelentős: ezek nagy árugrásokat okoznak. Ezek az APX alakulásán is megfigyelhetők.

A 2. ábrán a liberalizáció hatását is megfigyelhetjük. 2000. VII. 1-jétől 2001. I. 1-jéig a piac államilag szabályozott volt. 2001. I. 1-jétől azonban a **liberalizáció jól láthatóan az árak csökkenését és a volatilitás növekedését eredményezte.** (A grafikon az APX napi 16:00 órás értékeit ábrázolja.) Azt is láthatjuk, hogy a piac 2001-ben és 2002-ben eltérő módon viselkedett: ez a piaci szereplők tanulási folyamatát tükrözi.

A továbbiakban megpróbálunk a spot árfolyamon alapuló európai opciókra

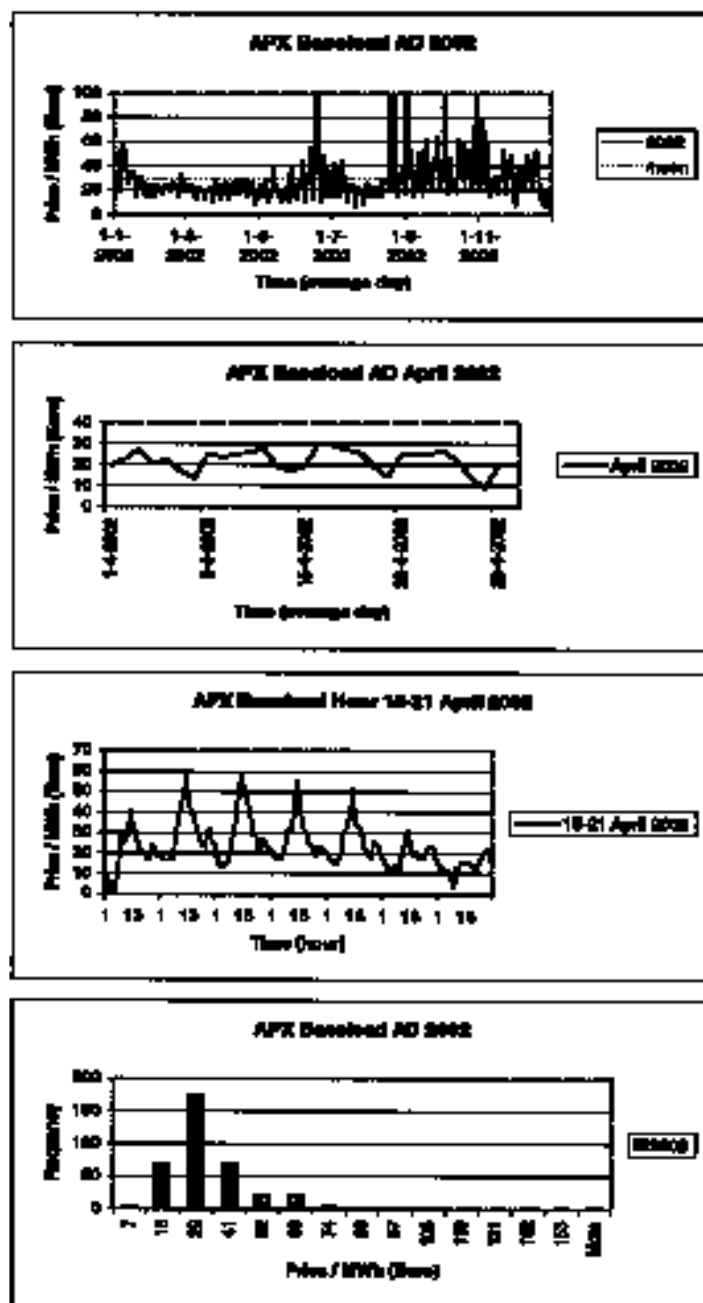
olyan értékelési algoritmust kidolgozni, amely az átlaghoz való visszahúzást és az árugrások jelenségét is modellezi. Modellezni kívánjuk az elektromos energia tárolhatatlanságát is, amikor a kockázatmentes mértéket meghatározzuk. Ennek megfelelően cikkünk felépítése a következő. A második fejezetben a spot árfolyam matematikai modelljeit, míg a harmadik fejezetben a sztochasztikus differenciálszámítás szabályait foglaljuk össze. A negyedik fejezetben az ugró diffúziós modellt tárgyaljuk. Az ötödik fejezetben kidolgozunk egy szemianalitikus módszert, amely segítségével az opció-árazó parabolikus parciális integro-differenciál egyenlet (továbbiakban PIDE) megoldható. Az utolsó fejezetben eljárást adunk a paraméterek becslésére, és ezzel az objektív P mérték meghatározására. Cikkünket néhány numerikus eredményre és az összefoglalással zárjuk.

A SPOT ÁRFOLYAMMODELLEK ÁTTEKINTÉSE

Ebben a fejezetben rövid áttekintést adunk az irodalomban található spot árfolyam modellekről. Elsőnek a pusztán diffúziós tagot tartalmazó modellekről ejtünk szót, majd rátérünk a Poisson-féle ugrásokat is tartalmazó modellek részletes ismertetésére. A harmadik alpontban szót ejtünk a rezsimváltásos (regime switching) modellről, majd a fejezetet a nem konstans volatilitást tartalmazó modellek rövid ismertetésével zárjuk.

A fejezet bevezetésül szolgál az exponenciális Poisson mértéket használó, ere-

3. ábra



A legfelső kép az APX base load-ot mutatja 2002-ben. A második a 2002. áprilisi base load-ot ábrázolja. A következő a 2002. IV. 15–2002. IV. 21. közötti árakat, míg az utolsó az árak eloszlását mutatja.

detileg [Kou01] által részvényderivatívok árazására kifejlesztett matematikai modell tárgyalásához.

⇒ Diffúziós modellek

Tekintsük a részvényárfolyamok modellezéséből jól ismert, Geometriai Brown Mozgást (GBM):

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (1)$$

ahol μ valamint σ a driftet és volatilitást meghatározó állandók, W a Brown-mozgást jelöli, S lognormális eloszlást követ: a variancia az idő lineáris függvénye. Mivel a spot piacon a korlátos varianciát és az árak hosszú távú átlag körüli ingadozását figyelhetjük meg, így ez a modell nem alkalmas a spot árfolyamok leírására.

A fenti problémákat küszöböli ki a Geometriai Mean Reversion (GMR) modell [Schw 97]:

$$dS(t) = [\kappa - \ln S(t)]S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (2)$$

ahol κ állandó, α a hosszú távú átlag logaritmus, σ a volatilitás.

A GBM és a GMR lognormális áreloszlást implikál, amelynek köszönhetően az árak nem negatívak maradnak. A fentiek kivül az irodalomban található olyan modellek, melyek normális áreloszlást tételeznek fel. Az általános GMR modell a következőképpen írható fel:

$$dS(t) = \kappa[\bar{\alpha} - S(t)]dt + \sigma S(t)^\gamma dW(t) \quad (3)$$

ahol $\bar{\alpha}$ a hosszú távú átlag, γ pedig a volatilitás árfüggését írja le. Ha $\gamma = 0$ akkor az Ornstein-Uhlenbeck modellt kapjuk:

$$dS(t) = \kappa[\bar{\alpha} - S(t)]dt + \sigma dW(t) \quad (4)$$

Ha $\gamma = 1$ akkor az árak továbbra is nem-negatívak, de a volatilitás az ár lineáris függvénye [DelB00]:

$$dS(t) = \kappa[\bar{\alpha} - S(t)]dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (5)$$

[DelB00] szerint ez a modell sokkal jobban leírja a spot árakat, mint (1), (2). Ezt az állítását a kaliforniai, spanyol és ausztrál piacokról gyűjtött empirikus áreloszlások vizsgálatával igazolta.

Ha $\gamma = 1/2$, akkor a rövid távú kamatmodellek elméletéből ismerős Cox-Ingersoll-Ross (CIR) modellel jutunk:

$$dS(t) = \kappa[\bar{\alpha} - S(t)]dt + \sigma \sqrt{S(t)}dW(t) \quad (6)$$

⇒ Poisson-ugrásokat tartalmazó modellek

A fenti modellek Poisson-féle ugrásokkal kibővíthetők. Ezek az ugrások modellezhetik például az egyes erőművi meghibásodások gyakoriságát és a spot árfolyamra gyakorolt hatásukat. Az ugrások a spot árfolyamok rövid távú viselkedésében játszanak nagyobb szerepet, a hosszú távú viselkedésben az átlaghoz való visszahúzás érvényesül. Erre a következtetésre jut [Barz99] is, aki azonban azt is megjegyzi, hogy az ugró tag nélküli GMR az árfolyamokat a hosszú távú átlag környezetében jobban modellezi. Következésképpen, az ugrások a „vastag farok” jelenségét magyarázzák.

Cikkünkben az összetett Poisson folyamattal (compound Poisson process) fogunk dolgozni. Igen sok véletlenszerű folyamatra igaz, hogy az inkrementumok egymástól függetlenek és stacionerek. Ezeket a folyamatokat az irodalom Lévy-folyamatokként

ismeri, L. [Bert96]. A Lévy-folyamatok fontos jellemzője, hogy a egyértelműen előállíthatók a következő folyamatok segítségével (L. Lévy-Hincsin formula, [Bert96]):

- driftet is tartalmazó Brown-mozgás;
- egységugrásnál nagyobb ugró összetett Poisson folyamat;
- csak ugrásokat tartalmazó martingál, ahol az ugrások egységénél kisebbek.

Általában elmondható, hogy a Brown mozgás a „folytonos zajt” írja le, míg a Poisson-féle ugrások a „nagyobb szakadásokat” modellezik. Az első ugró diffúziós modellt [Mert76] alkotta, aki azt feltételezte, hogy az ugrások nagyságai normális eloszlást követnek. [Kou 01] ezzel szemben azzal a feltevessel él, hogy az ugrásnagyság valószínűségi változója ún. kettős exponenciális eloszlást (double exponential) követ. Ezzel az asszimmetrikus hozamok és a volatilitás-mosoly is jól modellezhető. Ugrási folyamatokat nem csak a részvényárfolyamok, hanem a forward görbék [Glas03] és kötvények [Bjor97] modellezésére is használnak.

⇒ Rezsimváltás (regime switching)

Ez a modell sok tekintetben hasonlít a Poisson-féle ugrás modellre. A modell feltevése szerint, hogy a folyamat különböző diszkrét „alapállapotokat” vehet fel. A két-állapotú rezsim-váltó modell megkülönböztet egy „abnormális állapotot” (a magas árak leírására) valamint egy normál állapotot (az alacsony árak leírására) és a két rezsim közti átmenetet modellezi. Ezt a modellt használja például [Hami 90], [Deng99] és [Khol01]. A rezsimváltó mo-

dell előnye, hogy a két rezsimben két, teljesen különböző formulával írhatjuk le a folyamatot. A rezsimváltások segítségével az alap- és a csúcsterhelés is modellezhető.

⇒ Egyéb modellek

A fent említett három modellen kívül az irodalomban számtalan egyéb modellt találhatunk. Fontos osztályt képviselnek az időfüggő volatilitással dolgozó modellek. [Dupi94] az időfüggő volatilitást ún. volatilitás-felületek segítségével modellezi. Sokkal népszerűbb [Hest93] modellje, aki a volatilitást is sztochasztikus folyamatként írja le és a következő, csatolt sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszerrel állítja fel a mögöttes termékre és annak volatilitására:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW^1(t) \quad (7)$$

$$dv(t) = \kappa[\theta - v(t)]dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW^2(t) \quad (8)$$

Ennek a modellnek a továbbfejlesztése található [Carr03]-ban, aki a sztochasztikus volatilitást időváltással [time change] modellezi.

Az affin diffúziós modell ugrásokkal kiegészítve a sztochasztikus és determinisztikus volatilitás modellek általánosítására szolgál. Ebben a modellben a drift, a kovariancia mátrix valamint az ugrások nagysága lineáris paraméterek. Általában egy modell affin X-ben, ha $A = c_1(t) + c_2(t)X$ teljesül c_1, c_2 állandókra. Az affin modellek elméletében gyakran idézett munka [Duff00] Az ugrásokkal kiegészített diffúziós modell segítségével multifaktor modellek is felállíthatók: [Deng99] például egy kétfaktoros modellt ír le, két

különböző ugrási folyamattal, míg [Pilo 98] a hosszú távú átlag időfüggését modellezi. Az utóbbi modell hátránya, hogy rendkívül hosszú idősort igényel. Végezetül megemlítenénk [Lewi01] cikkét, aki több ugrás-eloszlást (pl. variancia-gamma, Normál Inverz- Gauss, általánosított hiperbolikus eloszlások, stb) is tárgyal.

⇒ Modellválasztás

Cikkünkben olyan modellt ismertetünk, amely az árugrásokat, „tüskéket” is jól leírja. Az elmondottakból következően erre a célra három modell felel meg: az árfüggő volatilitással dolgozó, az ugró diffúziós és a rezsinváltó modell. Igaz, hogy az árfüggő volatilitás a „tüskéket” jól leírja, de nem produkál nagy szakadásokat, amelyek a piacon néha megfigyelhetők. Erre csak az ugró diffúziós és a rezsinváltó modell képes. Az implementálásra rendelkezésre álló idő korlátos volta miatt az ugró diffúziós modell mellett döntöttünk. Modellünkben feltesszük, hogy a volatilitás állandó, az ugrások nagyságának az eloszlását az analitikusan jól tárgyalható dupla exponenciális modellel írjuk le. Az irodalomban ezt a modellt [Kou01] exotikus opciók (például barrier, illetve lookback opció) analitikus képlettel történő értékelésére is használják. Mint említettük, az exponenciális modellel az eloszlások aszimmetriája is leírható.

SZTOCHASZTIKUS KALKULUS

A pénzügyi matematikában fontos szerepet játszik az Itô-formula. Az Itô-formula

segítségével felállíthatjuk azt a sztochasztikus differenciálegyenletet, amelyet egy $X(t)$ véletlenszerű folyamatnak ki kell elégítenie. Ebben a fejezetben az Itô-formula egy viszonylag egy könnyen követhető interpretációját ismertetjük, amely már magában foglalja a Poisson-féle ugrásokat is. A sztochasztikus folyamatok elméletében fontos szerepet játszanak a martingálok. Durván fogalmazva egy folyamat akkor martingál, ha a jövőértékének várható értéke megegyezik a folyamat ma felvett értékével, azaz a sztochasztikus differenciálban a dt tag együtthatója nulla (l. alább).

⇒ It -formula a Poisson folyamatokra

1. tétel *Tegyük fel, hogy $X(t)$ kielégíti a következő sztochasztikus differenciálegyenletet (SDE):*

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t) + dN(t) \quad (9)$$

ahol m és s adaptált függvények, $W(t)$ a Brown mozgást, $N(t)$ azt a Poisson folyamatot jelöli, amelyet intenzitása λ és ahol az ugrásnagyság sűrűségfüggvénye $g(\cdot)$. Ha $f[X(t), t]$ folytonos, és léteznek a megfelelő parciális deriváltjai, akkor $f[X(t), t]$ kielégíti a következő SDE-t:

$$df(X(t), t) = df_c(X(t), t) + df_j(X(t), t) \quad (10)$$

ahol

$$df_c(X(t), t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dW(t) \quad (11)$$

$$df_j(X(t), t) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)g(y)dy - f(x_-) \right] dN(t) \quad (12)$$

(12) egyenletben $f(x, y)$ valamint $f(x_-)$ a függvényértékek rendre az ugrás előtt és után.

A tétel bizonyítása megtalálható [Iked81]-ben, míg [Ethe02]-ben egy kevésbé precíz, jobban követhető „bizonyítást” találunk. Mi a következőkben egy példán, a Doleans-Dade formulán mutatjuk be a sztochasztikus differenciálszámítást Poisson-ugrásokra.

⇒ Példa: a Doleans-Dade-folyamat

Feladatunk annak ellenőrzése, hogy a Doleans-Dade-folyamat valóban martingál. Példánkat részben [Ethe02]-ből vettük. Tegyük fel, hogy $Z(t)$ kielégíti a következő SDE-t:

$$dZ(t) = \lambda(1 - e^v)dt + dN(t) \quad (13)$$

ahol $N(t)$ azt a Poisson folyamatot jelöli, amelynek intenzitása 1, az ugrásnagysága rögzített, v . Legyen $L(Z(t), t) = e^{Z(t)}$, amelyről belátjuk, hogy martingál.

Az Itô-formula szerint $L(Z(t), t)$ sztochasztikus differenciálja a következő lesz:

$$dL(Z(t), t) = dL_c(Z(t), t) + dL_j(Z(t), t) \quad (14)$$

Tekintsük a folyamat folytonos (vagyis a Poisson-ugrások nélküli) részét. Legyen $m = \lambda(1 - e^v)$, valamint $s = 0$ amelyből következik, hogy

$$dL_c(Z(t), t) = \lambda(1 - e^v)L(Z(t), t)dt \quad (15)$$

azaz (11)-ben $\sigma = 0, \mu = \lambda(1 - e^v)$.

Ha ugrás következik be, a folyamat által felvett érték $Z(t)$ -ről $Z(t)+v$ -re változik. Esetünkben $g(\cdot)$ Dirac-delta: $\delta(y-n)$ és a nem-folytonos (azaz ugrást tartalmazó) tag megváltozása a következő lesz:

$$dL_j(Z(t), t) = [dL(Z(t)+v, t) - dL(Z(t), t)]dN(t) \quad (16)$$

Vegyük észre, hogy

$$L(Z(t)+v, t) = e^{Z(t)+v} = e^v L(Z(t), t) \quad (17)$$

azaz

$$dL(Z(t), t) = L(Z(t), t)(1 - e^v)[\lambda dt - dN(t)] = L(Z(t), t)(e^v - 1)dM(t) \quad (18)$$

ahol a következő jelölést vezettük be: $dM(t) = dN(t) - \lambda dt$. Meg lehet mutatni, hogy ez az ún. kompenzált Poisson-folyamat martingál, azaz (18) driftmentes, vagyis $L(Z(t), t)$ szintén martingál.

UGRÓ DIFFÚZIÓS MODELL

Ebben a fejezetben meghatározzuk a spot árfolyamat leíró modellt, és az ugrásnagyság valószínűségi változójának sűrűségfüggvényét, amely szimmetrikus exponenciális eloszlást követ. A modell előzményei [Kou01]-ben találhatók meg. Levezetjük az árazásra használt parabolikus integro-differenciál-egyenletet, a megfelelő kezdeti feltétellel.

⇒ Specifikáció

Modellünkben az ugrások egységnyi idő alatti száma Poisson-eloszlást követő valószínűségi változó, míg az ugrások nagyságát egy ettől független valószínűségi változó modellezi. Az első ugró difúziós modellekben [Mert76] az ugrásnagyság valószínűségi változója normális eloszlást követ. Mi ezzel szemben azt tételezzük fel, hogy az árak logaritmusában lévő ugrások dupla exponenciális eloszlást követnek: ez az eloszlás tapasztalatok szerint jól leírja az ugrási folyamatot, az inkrementumok függetlenek, valamint a számítás jelentősen leegyszerűsödik.

Ha az ugrások Poisson-eloszlás szerint λ frekvenciával érkeznek, akkor annak a valószínűsége, hogy dt idő alatt pontosan egyetlen ugrás történik, $\lambda dt + o(dt)$, az egyenél több ugrás valószínűsége pedig $o(dt)$.

Modellezzük az árak alakulását a következő SDE-vel:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \kappa(\alpha - \ln S_t)dt + \sigma dW_t + d \sum_{i=1}^{N_t} (V_i - 1) \quad (19)$$

ahol κ , α és σ konstansok, N_t a a frekvenciájú Poisson-folyamat, míg $\{V_i\}$ egy olyan valószínűségi változó, hogy $Y = \log V$ dupla exponenciális eloszlást követ, az alábbi sűrűségfüggvénnyel:

$$f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}} \quad (20)$$

Tekintve, hogy a valószínűségi változónak véges várható értéke van, így $\eta_1 > 1$ és $\eta_2 > 0$ [lásd például (22)]. Ha feltesszük, hogy $p > 0$ valamint $q > 0$, akkor a p és q paramétereket tekinthetjük a felfelé illetve a lefelé való ugrás valószínűségeinek. Leel-

lenőrizhető, hogy a sűrűségfüggvény integrálja 1-et ad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy = p \int_0^{\infty} \eta_1 e^{-\eta_1 y} dy + q \int_{-\infty}^0 \eta_2 e^{\eta_2 y} dy \equiv 1 \quad (21)$$

Az egyszerűség kedvéért szimmetrikus sűrűségfüggvénnyel dolgozunk, azaz:

$$p = q = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \eta_1 = \eta_2 = \eta.$$

További feltevés, hogy W_t , N_t , valamint Y_i egymástól független folyamatok.

$\sum_{i=1}^{N_t} (V_i - 1)$, vagy röviden Z_t összetett Poisson folyamat.

Z_t nem martingál, mivel várható értéke nem nulla. Jelöljük továbbá az átlagos ugrásnagyságot $z = E[V] - 1$ -vel. Belátható, hogy $dMt = Z_t - \lambda z$ martingál. Ha az ugrásnagyság a már említett dupla exponenciális eloszlást követi, akkor z a következő lesz:

$$\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} e^y f_Y(y) dy - 1 = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1 \quad (22)$$

A kompenzátort az SDE-be behelyettesítve a következőket kapjuk:

$$\frac{dS_t}{S(t)} = \kappa(\alpha - \ln S_t - \frac{\lambda \zeta}{\kappa}) dt + \sigma dW_t + d \sum_{i=1}^{N_t} (V_i - 1) \quad (23)$$

Cikkünkben a továbbiakban az európai put opció beárazására szorítkozunk: ez a kifizetési függvény korlátossága miatt numerikusan sokkal egyszerűbb feladat, mint a call opció árazása. Megjegyezzük, hogy numerikus kísérleteinkből azt a következtetést vontuk le, hogy az általunk alkalmazott Fourier-sorfejtés call opciókra is jól alkalmazható. A következőkben a „lineáris” ártartomány helyett a logaritmikus ártartományban oldjuk meg PIDE-nket, a logaritmikus transzformációval ugyanis a Black-Scholes (BS) egyenlet (ugrási tag

hiányában) egy konvektív tagot is tartalmazó hővezetési egyenletté alakítható, amely egyike a legegyszerűbb parabolikus PDE-knek [Simo83]. A Cauchy feladat (esetünkben a kezdeti érték feladat helyett „végérték-feladat”) tehát:

$$X_t = \ln S_t \quad (24)$$

$$\alpha^* = \alpha - \frac{\lambda \zeta}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{\kappa} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \kappa(\alpha^* - x) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \\ - \lambda \psi + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y, t) f_Y(y - x) dy = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

a következő végfeltétellel:

$$\psi(X_t, t)|_{t=T} = \begin{cases} 1 - e^x & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (27)$$

ahol $\langle\langle \dots \text{OLE_Obj} \dots \rangle\rangle$ a logaritmikus transzformáció miatt különbözik α -tól. Ha az időkoordinátát a következőképpen skálázzuk át: $\tau = T - t$ [vagyis $\frac{\partial}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial t}$] és bevezetjük az alábbi jelöléseket az elliptikus differenciáloperátorra és a konvolúcióra:

$$L\psi(X_t, t) = \kappa(\alpha^* - X_t) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \lambda \psi \quad (28)$$

$$K\psi(X_t, t) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y, t) f_Y(y - x) dy \quad (29)$$

akkor a megoldandó PIDE az alábbi lesz a fent megadott kezdeti feltétellel:

$$(L + K)\psi(X_t, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (30)$$

A figyelmes olvasó észreveheti, hogy ha a transzformált PIDE-t a transzformált BS egyenlettel összehasonlítjuk, akkor az előbbiből „hiányzik” egy $-r\gamma(x, t)$ tag. Ez

az ekvivalens mértékek egyértelműsége vezethető vissza. Mint ismeretes, a derivatívok értékelése nem az „árfolyam idősorából levezethető”, ún. obojkív **P**, hanem egy kockázatmentes **Q** mérték alatt történik [Bjor98]. Ez a **Q** mérték akkor állítható elő egyértelműen, ha az SDE egy zajforrást [pl. Brown mozgást vagy Poisson-ugrást] tartalmaz így összeállítható a származékos termékből, kockázatmentes államkötvényből és a mögöttes termékből egy kockázatmentes portfólió. A portfólió összeállítása megköveteli, hogy a mögöttes termék tárolható legyen (pl. értékpapírszámlán). Ha a részvényeket GBM-mel modellezzük, akkor a **Q** mérték egyértelmű: alatta a folyamat driftet leíró tagja $rSdt$ lesz, ebből következik a fent említett $-r\gamma(x, t)$ tag. A spot termékre vonatkozó opció értékeléséhez nem áll rendelkezésre egyértelmű kockázatmentes **Q** mérték: egyrészt, mert modellünkben két zajforrás van (a GBM és a tőle független Poisson-féle ugrófolyamat) másrészt, mert az elektromos energia nem tárolható, így felhasználásával kockázatmentes portfólió sem állítható elő. Az irodalomban többféle eljárást is leírnak a „lehető legjobb” **Q** mérték meghatározására. Ezek közül [Mert76] és [Barz99] gondolatmenetét ismertetjük. Merton felteszi, hogy az ugrások kockázata diverzifikálható, ezért – feltevése szerint – nullának tekinthető. Barz ezzel szemben hasznossági függvényen alapuló elemzést publikál, melyben felteszi, hogy a piaci szereplők kockázatkerülése határozza meg a keresett **Q** mértéket. Errol [Lewi01]-ben részletesen is olvashatunk. Mivel nincs kockázatmentes portfólió, így a portfólió hozamának legalább a tartási költségeket (cost of

carry) el kell érnie. Mivel a tartási költségek (vagy az alternatív befektetések hozama) számos esetben nem, vagy csak önkényesen határozhatók meg, így ezt az egyszerűség kedvéért nullának vettük. A PIDE megoldásának technikája azonban változatlan, ha a cost-of-carry-t nullától különbözőnek választjuk. A cost of carry nullának vétele azt eredményezi, hogy a diszkontfaktor egy lesz. Ez a numerikus példáinkból is látható: a put opció értéke egyhez tart, midőn x tart a $-\infty$ -hez.

A PARCIÁLIS INTEGRO-DIFFERENCIÁL EGYENLET SZEMIANALITIKUS MEGOLDÁSA

Ebben a fejezetben meghatározzuk a PIDE megoldását. A megoldás egyértelmű ([Simo83]):

2. tétel. Ha $\psi(x, \tau)$ egy parabolikus differenciáloperátor megoldása és kielégíti a kezdeti feltételeket, akkor ez a megoldás egyértelmű.

$$K\psi(X_\tau, \tau) = \frac{\lambda\eta}{2} e^{A(\tau) - X_\tau B(\tau)} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(\eta - B(\tau))y} dy + \int_0^{\infty} e^{-(\eta + B(\tau))y} dy \right) = \frac{\lambda\eta^2}{\eta^2 - B^2(\tau)} \psi(X_\tau, \tau) \quad (32)$$

(29) x szerinti parciális első és második deriváltjai a következők lesznek:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -B(\tau)\psi(X_\tau, \tau) \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = B^2(\tau)\psi(X_\tau, \tau) \quad (34)$$

$$\psi(X_\tau, \tau) \left[-\frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} - \kappa\alpha^* B(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(\tau) + \frac{\lambda\eta^2}{\eta^2 - B^2(\tau)} - \lambda \right] + X_\tau \psi(X_\tau, \tau) \left[\kappa B(\tau) + \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} \right] = 0 \quad (36)$$

1. proposíció. A PIDE megoldására a következő Ansatz-ot alkalmazzuk:

$$\psi(X_\tau, \tau) = e^{A(\tau) - X_\tau B(\tau)} \quad (31)$$

Barz nem utal rá, hogy e proposíció miből következik: véleményünk szerint ezt a proposíció a PIDE Lie-féle szimmetria félcsoportjainak vizsgálatából adódik. Problémát jelent, hogy a PIDE megoldása C^∞ függvényosztályba, míg a plain vanilla opciók kifizetési függvénye (így a PIDE kezdeti feltétele) C^0 függvényosztályba tartozik (a strike árnál a kifizetési függvény nem differenciálható). Ez nem jelent problémát, ha a PIDE differenciáloperátorának meg tudjuk határozni a fundamentális megoldását. Mivel mi a következőkben a megoldást Fourier sor alakjában keressük, így a Fourier-sor a strike árnál nem fog konvergálni.

Tekintsük először a konvolúció operátort, ha a $\psi(x, \tau)$ megoldást (29) adja meg. Feltételezzük, hogy $-\hbar < \text{Re}(B(\tau)) < \hbar$ tehát a konvolúció kiértékelhető. Később igazoljuk is a feltevésünket.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \left[\frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} - X_\tau \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} \right] \psi(X_\tau, \tau) \quad (35)$$

Ha (30)-t és a (31), (32), (33) parciális deriváltakat behelyettesítjük a PIDE-be, a következőt kapjuk:

Ez az egyenlet minden x -re igaz, azaz a két, szögletes zárójelben lévő tényezőnek nullának kell lenni. Ez azt jelenti, hogy

$$-\frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} - \kappa \alpha^* B(\tau) + \frac{1}{2} \sigma^2 B^2(\tau) + \frac{\lambda \eta^2}{\eta^2 - B^2(\tau)} - \lambda = 0 \quad (37)$$

$$\kappa B(\tau) + \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} = 0 \quad (38)$$

(36) megoldására a következő adódik:

$$B(\tau) = q_1 e^{-\kappa \tau} \quad (39)$$

$$A(\tau) = \frac{\eta^2 \sigma^2}{4\kappa} \left[\frac{1}{2} \ln(B^2(\tau) - \eta^2) - \ln(q_1 - \eta e^{\kappa \tau}) - \ln(q_1 + \eta e^{\kappa \tau}) \right] + \alpha^* B(\tau) - \frac{\sigma^2}{4\kappa} B^2(\tau) + \frac{\lambda}{2\kappa} \ln(\eta^2 e^{2\kappa \tau} - q_1^2) - \lambda \tau + q_2 \quad (40)$$

Azzal, hogy két, nem nulla függvényt kaptunk megoldásul, a propozíció helyességét igazoltuk. Következő lépésként a kezdeti feltételt a PIDE megoldásai szerint sorbafejtjük. A komplex Fourier sort a következőképpen definiáljuk:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i x}{L} n} \quad (41)$$

ahol is

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{\frac{2\pi i x}{L} n} dx \quad (42)$$

A Fourier sor egyértelmű és egyenletesen konvergens. Ha q_1 -t [L.(37)] tiszta képzetesnek választjuk:

$$q_1(n) = \frac{2\pi m}{L} i \quad (43)$$

akkor a Fourier-sorfejtés az Ansatz függvények segítségével elvégezhető. q_2 -t a következő feltétel érvényesítésével határozhatjuk meg:

$$A(0) = 0 \quad (44)$$

Ez az (29) Ansatz komplex értékű fázisát $\tau = 0$ -nál nullával teszi egyenlővé. (29), (37) és (42) segítségével a következőt kapjuk:

$$\psi_n(X_\tau, 0) = e^{-q_1(n) X_\tau} \quad (45)$$

A megoldás sor alakjában a következő lesz:

$$\psi(X_\tau, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n(X_\tau, \tau) \quad (46)$$

A szuperpozíció tételét felhasználva (mind a differenciál- mind a konvolúció operátora lineáris) $\psi(x, \tau)$ kielégíti a PIDE-t, (mivel a tagok egyenként kielégítik). A sor előállításából következően a megoldás a kezdeti feltételt is kielégíti, így valóban megoldása a Cauchy feladatnak. Az együtthatók a következők lesznek:

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \psi_n(x,0) e^{q_1(n)x} dx = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{q_1(n)} \left(1 - e^{-q_1(n)L/2} \right) - \frac{1}{1+q_1(n)} \left(1 - e^{-(1+q_1(n))L/2} \right) \right] \quad (47)$$

A megoldás 4 időszinten az ábrán látható, a következő paraméterek mellett: $h = 11$, $k = 0.26$, $s = 0.050$, $a = 3.33$, $l = 200$. Megjegyezzük, hogy l -t a hosszú távú put opció értékekhez kalibráltuk.

PARAMÉTERBECSLÉS

A fenti modell öt paramétert tartalmaz: a -t, s -t, h -t, k -t és l -t. Ebben a fejezetben ismertetjük az általunk alkalmazott módszert ezen paramétereknek az objektív P valószínűségi mérték alatt történő meghatározására.

⇒ Különböző paraméterbecslési módszerek

Az irodalomban több paraméterbecslési módszert találhatunk. A statisztikusok, hatékonysága miatt, a maximum likelihood (ML) módszert részesítik előnyben. Barz [Barz99] is ezt a módszert használja, hogy az ugró diffúziós modell paramétereit megbecsülje. Az ML-módszer ez esetben öt nemlineáris egyenletet eredményez, amelyek megoldásai adják a paraméterek értékeit. A nemlineáris egyenleteket iterációval oldja meg. Mi nem ezt a módszert alkalmazzuk, mivel egyrészt a módszer inverz Fourier transzformációt tesz szükségessé, (amelyet csak numerikusan lehet értékelni) másrészt a likelihood függvénynek több lokális minimuma van, így a megoldás meghatározása az iteráció időigényessége miatt még nehezebb. Ezért inkább

a karakterisztikus függvény módszert részesítjük előnyben, mint [Jian00], aki egy, a többdimenziós karakterisztikus függvényeken alapuló módszert ismertet, vagy [Sing01], aki pedig egydimenziós feltételes karakterisztikus függvényt használ. E módszerekben az a közös, hogy meghatározzák a tapasztalati karakterisztikus függvényt, amelyre az elméleti karakterisztikus függvényt illesztik. Ez a módszer sokban hasonlít a Momentumok Módszerére (Method of Moments, MoM). A MoM segítségével az első momentumok [esetünkben öt] illeszthetők a mintából számított momentumokhoz. Ebben a fejezetben az empirikus karakterisztikus függvény módszert alkalmazzuk a SDE-ben szereplő paraméterek meghatározásához.

⇒ Elméleti karakterisztikus függvény

1. definíció. Az X_t karakterisztikus függvényét a következőképpen definiáljuk:

$$\phi(X_t, t, T, k) = E(e^{ikX_T} | X_t) \quad (48)$$

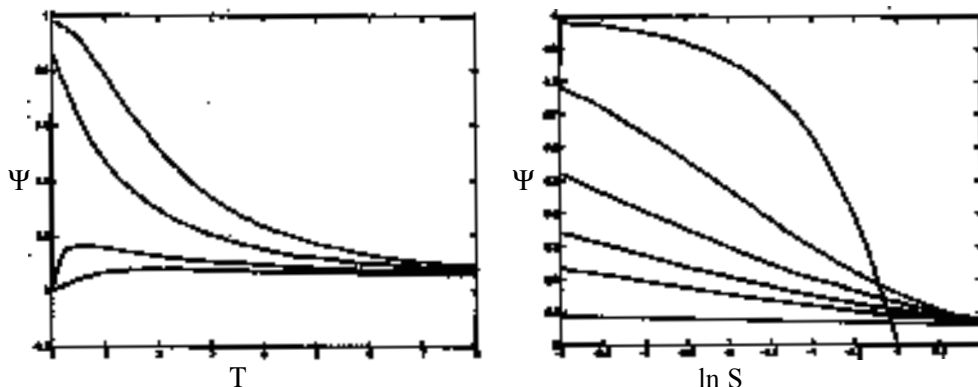
Az opcióárazással való kapcsolat világos, ha a backward Kolmogorov egyenletet tekintjük:

$$(L + K)\phi(X_t, t, T, k) + \frac{\partial \phi(X_t, t, T, k)}{\partial t} = 0 \quad (49)$$

ahol L -t és K -t fent definiáltuk. A karakterisztikus függvény kielégíti a következő kezdeti érték feltételt:

$$\phi(X_T, T, T, k) = \exp(ikX_T) \quad (50)$$

A Fourier sorfejtéssel kiszámított opció ár (a) különböző x
(b) különböző időszinteken



vagyis a karakterisztikus függvénynek ugyanazt az integro-differenciál egyenletet kell kielégíteniük, amelyet az opcióáraknak. Ezért (29) Ansatz megoldás itt is használható. Az Ansatz függvény formája a Lie-féle félcsoport elemzésből adódik [Olve00], és már [Hest93] és [Duff00] is használta az affín diffúziós modell megoldásánál.

2. propozíció. A karakterisztikus függvényt a következő formában keressük:

$$\phi(X, t, T, k) = \exp(A(t) - X, B(t)) \quad (51)$$

Az ismeretlen $B(t)$ és $A(t)$ függvényeket rendre (37) és (38) szolgáltatják.

Összefoglalva: (47), (48) és (49) felhasználásával az alábbi karakterisztikus függvény adódik:

$$\phi(X, t, T, k) = \exp\left(A(t) + ik[(X_t - \alpha^*)e^{-\kappa(T-t)} + \alpha^*]\right) \quad (52)$$

ahol

$$A(t) = \frac{\sigma^2 k^2}{4\kappa} (e^{-2\kappa(T-t)} - 1) + \frac{\lambda}{2\kappa} \left[\ln(\eta^2 e^{2\kappa(T-t)} + k^2) - \ln(\eta^2 + k^2) \right] - \lambda(T-t) \quad (53)$$

Ellenőrizzük le, hogy a karakterisztikus függvény korrespondens-e a Geometriai Brown Mozgás (GBM) karakterisztikus függvényével.

(46)-ból következik, hogy a karakterisztikus függvény $k = 0$ -nál

$$\phi(X, t, T, 0) = 1 \quad (54)$$

$k = 0$ esetén $A(t) = 0$ -t kapunk és (50) 1 lesz.

A $(h, \mathfrak{J}) = 0$ speciális eset éppen a GBM-nek felel meg, amelyet $X_t^{(I)}$ vel jelölünk. Mivel $X_t^{(I)}$ normális eloszlást követ, a várható értéke és szórása egyértelműen meghatározza:

$$\phi(X_t, t, T, k) \Big|_{(\eta, \lambda)=0} = \exp\left(-\frac{k^2}{2} \text{var}(X_t^{(1)}) + ikE(X_t^{(1)})\right) \quad (55)$$

A várható érték meghatározására [Bjor98, lemma 3.15, 4.3]-t használtuk:

$$E(X_t^{(1)}) = (X_t - \alpha^*)e^{-\kappa(T-t)} + \alpha^* \quad (56)$$

$$\text{var}(X_t^{(1)}) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \quad (57)$$

(53), (54) és (55) ugyanazt az eredményt adja, mint (50):

$$\phi(X_t, t, T, k) \Big|_{(\eta, \lambda)=0} = \exp\left(-\frac{k^2 \sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) + ik[(X_t - \alpha^*)e^{-\kappa(T-t)} + \alpha^*]\right) \quad (58)$$

Az utolsó speciális eset, ha $(\kappa, \alpha, \sigma) = 0$, vagyis egy tisztán ugrásokból álló folyamatunk van, melyet $X_t^{(2)}$ -vel jelölünk. A Lévy-Hincsin formula alapján [Bert96]:

$$\phi(X_t, t, T, k) \Big|_{(\kappa, \alpha^*, \sigma)=0} = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(T-t)(e^{ikm} - 1) f_Y(m) dm\right) \quad (59)$$

ahol $f_Y(m)$ az ugrások eloszlása. Ha $p = q = 1/2$ és $h \equiv h_1 = h_2$, akkor az alábbi eredményre jutunk:

$$\phi(X_t, t, T, k) \Big|_{(\kappa, \alpha^*, \sigma)=0} = \exp\left(-\frac{\lambda(T-t)k^2}{\eta^2 + k^2}\right) \quad (60)$$

amelyet a l'Hospital szabály alkalmazásával (50)-ből is megkaphatunk.

⇒ Empirikus karakterisztikus függvény

Az empirikus karakterisztikus függvényt az APX 2001. január és 2002. július közötti napi átlagos értékei segítségével állítottuk elő. A paraméterbecsléshez szükségünk lesz a SDE diszkrétizált változatára is: $\Delta t = 1$ napot feltételezve ez a következő lesz:

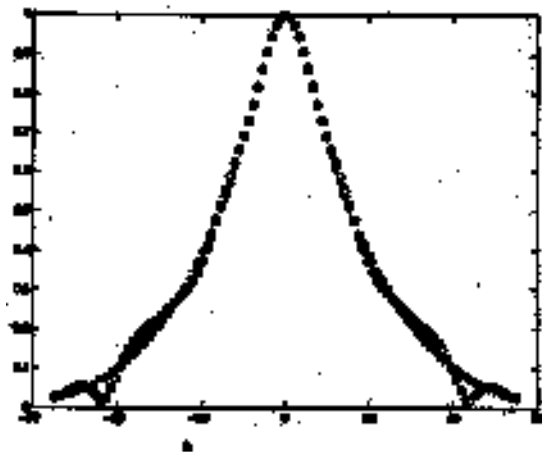
$$E(dX_t) = \kappa(\alpha^* - X_t)dt \quad (61)$$

ahonnan lineáris regresszió segítségével becsülhetjük κ -t és α^* -t.

κ ismeretében előállíthatjuk az empirikus sűrűségfüggvényt, majd ennek a Fourier transzformáltját véve megkapjuk az empirikus karakterisztikus függvényt. s -t, h -t és l -t a legkisebb négyzetek módszere segítségével a Matlab programcsomagban található Nelder-Meade szimplex algoritmus felhasználásával határoztuk meg.

Az 5. ábra a tapasztalati és elméleti karakterisztikus függvények valós és képzetes részeit ábrázolja.

A karakterisztikus függvény abszolút értéke:
(o) empirikus (+) elméleti karakterisztikus függvény



ÖSSZEFOGLALÁS

Cikkünkben ismertettük az energiapiac sajátosságait. A sztochasztikus differenciálszámítás elméletébe való rövid bevezetés után eljárást adtunk az európai put opció spot árfolyamok alapján történő árazására, illetve az SDE-ben található ismeretlen paraméterek megbecslésére, ha az SDE zajforrásait egy Geometriai Brown-mozgás, illetve egy olyan Poisson-folyamat alkotja,

amelynek ugrásnagyság eloszlását dupla exponenciális függvény adja meg. Az opció árazó parabolikus integro-differenciál egyenlet a megoldását Fourier-sor alakban kerestük, amely egyértelmű megoldást adott.

*

Ezúton szeretnénk köszönetet mondani Jobbágy Sándornak, a DZ Bank Fixed Income elemzőjének a kézirat átolvasásáért és értékes tanácsaiért.

HIVATKOZÁSOK

- Barz99** Barz, G. L., Stochastic financial models for electricity derivatives. PhD értekezés, *Stanford University* (1999)
- Bert96** Bertoin, J., Lévy processes. *Cambridge University Press*, Cambridge (1996)
- Bjor97** Bjork, T., di Masi, G., Kabanov, Y. & Runggaldier, W., Towards a General Theory of Bond Markets. *Finance and Stochastics*, 1 (1997), p. 141–174.
- Bjor98** Bjork, T., Arbitrage theory in continuous time, Oxford University press, Oxford (1998)
- Carr03** Carr, P., Geman, H., Madan, D. & Yor, M., Stochastic Volatility for Levy Processes. Megjelenik a *Mathematical Finance*-ben (2003).
- DelB00** Del Buono, M.A., The deregulation of electricity markets: promises made, challenges faced. PhD értekezés, *Stanford University* (2000)
- Deng99** Deng, S., Stochastic models of energy commodity prices and their applications: mean-reversion with jumps and spikes. Munkatanulmány, *Georgia Institute of Technology* (1999)
- Duff00** Duffie, D., Pan, J. & Singleton, K., Transform analysis and asset pricing for affine jump-dif-

- fusions. 68 *Econometrica* (2000), p. 1343–1376.
- Dupi94** Dupire, B., Pricing with a smile. *Risk*, 7 (1994) 1, p. 18–20.
- EP97** European Parliament, Internal market for energy: common rules for the internal market in electricity (1997)
<http://europa.eu.int/scadplus/leg/en/lvb/l27005.htm>
- EP01** European Parliament, Completing the internal energy market: revision of the electricity and gas directives (2001)
<http://europa.eu.int/scadplus/leg/en/lvb/l27040.htm>
- Ethe02** Etheridge, A., A course in Financial Calculus. *Oxford University Press*, Oxford (2002)
- Glas03** Glasserman, P. & Kou, S.G., The term structure of simple forward rates with jump risk. Megjelenik a *Mathematical Finance*-ben (2003)
- Hami90** Hamilton, J. D., Analysis of time series subject to changes in regime. *Journal of Econometrics*, 45 (1990), p. 39–70.
- Hest93** Heston, S.L., A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6 (1993) 2, p. 327–343.
- Iked81** Ikeda, N. & Watanabe, S., Stochastic differential equations and diffusion processes. *North Holland* (1981)
- Jian01** Jiang, G. J. & Knight, J. L., Estimation of continuous time processes via the empirical characteristic function. Munkatanulmány, *University of Western Ontario* (2000)
- Khol01** Kholodnyi, V. A., A non-Markovian process for power prices with spikes and valuation of European contingent claims on power. Preprint, TXU- RAG-01/00 (2001)
- Kou01** Kou, S. G. & Wang, H., Option pricing under a double exponential jump diffusion model. Munkatanulmány, *Columbia University* (2001)
- Lewi01** Lewis, A.L., A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Levy processes. Munkatanulmány (2001)
- Mert76** Merton, R. C., Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3 (1976) 1–2, p. 125–144.
- Olve00** Olver, P.J., Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer Verlag, Berlin (2000)
- Pilo98** Pilopovic, D., Energy risk: valuing and managing energy derivatives. *McGraw-Hill Inc.*, New York (1998)
- Sing01** Singleton, K.J., Estimation of affine asset pricing models using the empirical characteristic function. *Journal of Econometrics*, 102 (2001), p. 111–141.
- Simo83** Simon, L. & Baderko, E. A., Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek. *Tanönyvkiadó* (1983).
- Schw97** Schwartz, E.: The stochastic behavior of commodity prices: implications for valuating and hedging, *Journal of Finance*, 52 (1997), pp. 923–973.