

GAUDER MILÁN

A VaR ALKALMAZÁSÁNAK VESZÉLYEIRŐL

Az írás a kockázatotott értékkel (Value at Risk) kapcsolatos szabályozói elv érvényesülését, vagyis a VaR alapú tőketartalékolás tiszta elméleti esetét elemezi. Arra szándékozik rámutatni, milyen veszélyei vannak az említett módszer használatának a kockázat mértékének megállapítására. A szerző szerint a megfelelő konfidenciaszint kiválasztása legalább olyan fontos része a kockázatkezelésnek, mint maga a VaR érték számítása. Bevezetésként tekintsük a dolgozat által – a banki szabályozás keretei között – bemutatott elméleti eset egy közérthető analógiáját.

Ha egy ország a következő száz év lehetséges legnagyobb háborújára akarná felkészíteni a hadseregét, az elképzelhetetlen sok pénzbe kerülne. Ezért a kormányok általában azt az utasítást adják a hadügyminisztereknek, hogy egy húszévente előforduló méretű háborúhoz, vagyis száz évben az ötödik legnagyobb összecsapáshoz szükséges készenléti szintet tartsák fenn. A kérdés az, hogy miért pont a húszévente legnagyobbra készülnek. Mitől függ ez a szám, és van-e ennek a kívánatos szintnek valamiféle optimuma, ami minden országra egységesen jellemző kellene legyen. A cikk azt mutatja meg, hogy ez a döntés az adott nép kockázatkerülési hajlandóságától (béke iránti vágy kontra katonai kiadás) függ, és éppen ezért korántsem törvényszerű, hogy különböző országok azonos erősségű hadsereget tartsanak.

Míndez a banki szabályozás oldaláról azért érdekes, mert a bankfelügyeleti hatóságok a Bázeli Bizottság ajánlását követve egyelőre világszerte azonos tőketartalékokat követelnek meg a hitelintézetektől, függetlenül a tulajdonosok szándékaitól.

A kilencvenes évek eleje óta – a Bázeli Bizottság áldásos munkájának köszönhetően – a bankok működése szabályozottabbá és így remélhetőleg biztonságosabbá vált. A pénzügyi tudományos fejlődés eredményei némi késéssel megjelennek a bizottság ajánlásaiban, amelyeket a nemzeti szabályozók átültetnek a helyi környezetbe. A kilencvenes évek pénzügyi „felfedezettje”, a kockázatotott érték a vo-

natkozó kormányrendelet nyomán immár 2000 óta része a magyar pénzügyi szabályrendszernek. A kockázatotott érték bevezetése nagy előrelépést jelentett a korábban használt hányados, illetőleg kvóta jellegű megkötésekhez képest. Az eredeti ajánlás mögött meghúzódó elv szerint a VaR-alapú szabályozás sokkal jobban figyelembe veszi a kezelt eszközök jellemzőit, a piacok közötti összefüggéseket, az

egymást ellensúlyozó hatásokat, mint a korábban használt szemellenzős megoldások.

Sajnos az elvekben megjelenő nagyobb szabadságfok jótékony hatásait ellensúlyozták az ismeretlentől való félelem miatt beépített biztonsági követelmények. A kockázatot érték alapú tőkeképzést és kockázatkezelést még nem tapasztalhatjuk annak tiszta formájában. Noha ebben az esetben – a várakozások szerint – hatékonyabban érvényesülnének a piaci elvek, ami megtisztítaná az üzletet a szabályozói arbitrázsból élőkötől, és a valódi pénzügyi teljesítményre terelné a figyelmet.

Az írás célja, hogy a szabályozói elv érvényesülését, vagyis a VaR alapú tőketartalékolás tiszta elméleti esetét elemezze. Nem célja ugyanakkor a kockázatot érték teljes körű kritikája, hanem mindenképp elött arra szándékozik rámutatni, milyen veszélyei vannak a kockázat mértékének megállapítására történő használatának.

A VaR SZEREPE A SZABÁLYOZÁSBAN

A VaR mint pénzben kifejezhető mérőszám azt mutatja meg, hogy a befektetett összeg (portfólió) adott idő alatt – meglehetősen rossz esetben – mennyit veszít az értékéből. Ez a meglehetősen rossz eset általában száz lehetséges esetből a második vagy ötödik legrosszabb, szaknyelven második vagy ötödik percentilise az időszak végi nyereség-kimeneteknek. Függvénnyel leírható nyereségfüggvény esetén a VaR a nyereség eloszlásfüggvényének azon értéke, ahol az például egy vagy öt százalék értéket vesz fel.

Belső modellnek nevezi a szakirodalom a bank kockázatmérési és -kezelési rendszerét, amit a rendeletek szerint – a standard módszer helyett – tőkeszükséglete megállapítására használhat. A belső modellt a bank a piaci kockázatra (kamat-, részvény-, áru- és devizakockázat) vonatkozó tőkekövetelmény-számításánál alkalmazhatja. E modelltől megkövetelt feltételek közé tartozik, hogy a tőkekövetelmény számítását a kockázatot érték módszerével – naponta, 99 százalékos szignifikanciaszinten és minimum tíz napos tartási periódussal számolva – kell végezni és utóteszteléssel szükséges megállapítani, hogy a belső modell jól becsülte-e a kockázatokat.

A tavaly elfogadott szabályozást úttörő volta ellenére Magyarországon is számos kritika érte. A rendelet szövegébe csúszott elírások¹ használhatatlanná tehetik az adott részeket. A fő bírálat mégis a nemzetközi kritikákhoz nyúlik vissza. Mint-hogy a belső modell használata – a többletmunkán túl – a magasabb tőkekövetelmény eredményezte többletköltségekhez vezet, így a saját modell használatának megengedése nem hoz gyakorlati változást. A belső modell feltehetőleg jobban leírná a kockázati kitettséget, így ennek mellőzése nem a megfelelő tőkekövetelmény megköveteléséhez vezet. A többlettőke felhalmozása plusz költségeket ró a befektetési társaságokra és a hitelintézetekre, de éppen a kockázatnak kevésbé kitéttekre nagyobb.

1 21. § (2) cikk, valamint a 2. számú melléklet, 2.1. bekezdése.

A cikk későbbi szakaszában azzal az idealisztikus feltevessel fogok élni, hogy a bankok kereskedési tevékenységük tőkeszükségletét a portfóliójuk kockázatosított értékének megfelelően határozzák meg. Talán bízhatunk benne, hogy a szabályozás fejlődése abba az irányba tart, hogy a bank tőkefedezete külső vagy belső kényszer hatására a portfóliója VaR értékét érje el.

Egy másik feltételezéssel is élni kívánok, melynek indoklására a következő részben kerül sor. E feltételezés szerint egy bank minimalizálni szeretné tőkeszükségletét. A tőke pedig – a két előző feltételezés szerint – a portfólió kockázatosított értéke által determinált. Így a bank érdeke kereskedési portfóliója VaR-jának csökkentése, leszállítva ezzel a tőkeszükségletet, ami a költségek (alternatív költségek) mérséklődésén keresztül a nyereség növekedéséhez vezet. A nyereség növelése mint végső cél maga után vonhatja a VaR csökkentését mint közbülső célt.

$$\max \frac{\ddot{O}E * r_h - (1 - VaR\%) \ddot{O}E * r_f}{VaR\% * \ddot{O}E} = \max \frac{r_h - r_f + VaR\% * r_f}{VaR\%} = \max \left(r_f + \frac{marzs}{VaR\%} \right)$$

ahol a marzs az átlagos kihelyezési és betéti hozamok különbsége. A végső képlet értelmében a tulajdonosok célja az $\left(r_f + \frac{marzs}{VaR\%} \right)$ összeg maximalizálása. Ezen belül az r_f -re nincs befolyásuk, így a cél a kamatmarzs növelése és/vagy a VaR% csökkentése. A fenti képletben az r_f valójában a **tőke alternatív költsége**, amit a tulajdonosok állampapírba fektetve is elérhettek volna, míg a **marzs/VaR% a valódi gazdasági profitráta**.

MEKKORA A JÓ VaR?

Tegyük fel, hogy egy bank tőkekövetelménye a tartott portfóliója kockázatosított értékéhez van kötve. Ennek következtében a bank saját tőkéje egyenlő az eszközök VaR-jával. A forrás oldalon kockázatmentes kamatlábon finanszírozza magát. A bank tulajdonosai a saját tőkére (ST) vetített profitot (π), vagyis a tőkearányos nyereséget akarják maximalizálni. Ez pedig:

$$\max(ROE) = \max \frac{\pi}{ST} = \max \frac{\ddot{O}E * r_h - IT * r_f}{ST}$$

ahol $\ddot{O}E$ az összes eszköz, r_h az átlagos kihelyezési hozam és IT az idegen tőke, amire r_f kamatlábat fizet a bank. A saját tőke és az idegen tőke összege az összes forrás, ami megegyezik az összes eszközzel: $ST + IT = \ddot{O}E$. A saját tőke pedig a szabályozás értelmében az eszközök kockázatosított értéke: $ST = \ddot{O}E * VaR\%$. Ezt felhasználva a fenti egyenlet tovább írható:

A következtetés, hogy a bank – amelynek saját tőkéje a kockázatos portfóliójának kockázatosított értékéhez van kötve – célja a kamatmarzs növelése és portfóliója VaR-jának csökkentése. Ez a stratégia vezet a legnagyobb egységnyi tőkére vetített nyereséghez, vagyis tőkearányos nyereséghez (ROE). A marzs marginális növelésének jótékony hatása a profitra nem meglepő eredmény, szemben a kockázatosított érték abszolút értékben értett zsugorításra való készítés-

sel, mely már korántsem annyira nyilvánvaló.

A konfidenciaszint választása a kockázatvállalási hajlandósággal függ össze. Ha valaki 99 százalékos szinten akarja meghatározni a VaR-t, az a kockázatelutasítás magas fokát jelenti. Amennyiben ugyanis valaki kockázatsemleges, akkor 50 százalékos VaR-t számol, mert nem érdekli, hogy mi történik rossz esetben, csak az, hogy az esetek felében legalább mekkora a hozam. A konfidenciaszint megválasztása a hozam és a kockázat közötti egyéni átváltást tükrözi és az egyéni kockázati averzióra reflektál. Ha valaki kockázatkerülési hajlandóságának megfelelően megválasztotta a szignifikanciaszintet, akkor a számított VaR% érték már olyan jelzőszám, amely a portfóliót személyre szabottan jellemzi. A személyre szabás a konfidenciaszint megválasztásának igazi funkciója. Miután a mérőszám személyre szabása megtörtént, a kívánatos szintjének elérése a cél. Mivel a VaR% (normális eloszlásnál) a hozam és a szórás lineáris kombinációja, ezért ceteris paribus a magasabb hozam nagyobb, míg a magasabb szórás alacsonyabb VaR% értéket eredményez.² Mivel a kockázatkerülés miatt az előbbi hasznos, az utóbbi haszontalan változás, ezért a magasabb VaR%-nak hasznos tulajdonságnak kell lennie.

A felhozott példák és sematikus levezetések fényében térjünk vissza az alfejezet címében feltett kérdésre: mekkora a jó VaR? A válasz: A VaR% minél nagyobb értéke a kívánatos – a minél nagyobb

VaR% jelenthet kisebb veszteséget –, s ilyen értelemben a VaR%-maximalizálás racionális törekvés egy kockázatkerülő befektető, illetve hitelintézet számára.

A VaR% MINT HASZNOSSÁG

Ha elfogadjuk, hogy a VaR% magasabb értéke a kockázatkerülő befektető számára az általa jellemzett portfóliót kívánatosabbá teszi, akkor létezik olyan $U(\text{VaR}\%_{T, \alpha})$ hasznossági függvény – a VaR%-nak szigorúan monoton növekvő függvénye –, amely a befektető hasznosságát megfelelően írja le. Az értelmezési tartomány elemei a portfólióknak azonos időtávon és azonos konfidenciaszinten számított kockázatos értékei. Mivel az U szigorúan monoton növekvő, ezért a portfóliók hasznossági sorrendjét a VaR% nagysága is megfelelően írja le. A befektető viselkedése a szóban forgó preferenciarendszer alapján jól leírható közömbösségi görbékkel a hozam–szórás térben. Mivel a VaR% normális eloszlás esetén a hozamnak és a szórásnak lineáris kombinációja, ezért az általuk kifeszített térben az izo-VaR% közömbösségi görbék lineárisak lesznek. Ily módon egy adott hasznossághoz [$U^*(\text{VaR}\%)$] könnyen megadható azon hozam–szórás pontpárok halmaza, amelyek pontosan ekkora hasznosságot eredményeznek a befektetőnek. Mivel U^* -hoz pontosan egy $\text{VaR}\%^*$ érték tartozik, és $\text{VaR}\%^* = m - SN^{-1}(\alpha)\sigma$, ahol m a portfólió hozamának várható értéke, σ a szórása és SN a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Ezért ez utóbbi egyenletet kielégítő pontpárok jelzik az U^* közömbösségi görbét.

² Nem a hagyományos, hanem az abszolút érték nélküli értelmezésben.

$$VaR\%^* = m - SN^{-1}(\alpha)\sigma$$

$$m = VaR\%^* + SN^{-1}(\alpha)\sigma$$

Egy $VaR\%^*$ -hoz tartozó közömbösségi görbe a hozamtengelyt a $VaR\%^*$ pontban metszi, és attól jobbra³ $SN^{-1}(\alpha)$ meredekségű egyenes. Mivel az alfa szintjét általában egyhez közelinek szokás választani, így a közömbösségi görbe meredeksége pozitív,⁴ ez jelöli a kockázatkerülést. Amennyiben az alfa szint – egy befektető esetén történő összehasonlíthatóság miatt – állandó, a közömbösségi görbék párhuzamosak. A nagyobb alfa értékhez nagyobb meredekség tartozik. A nagyobb meredekség a hozam és a kockázat közötti nagyobb helyettesítési határányt jelzi. A nagy határány azt jelenti, hogy a befektető magasabb többlethozamot vár el egységnyi többletkockázatért. Ilyen értelemben a magas alfa jellemezte befektető jobban kockázatkerülő (1. táblázat). Ez összhangban áll a leírtakkal, miszerint az

alfa választása a kockázatkerülési hajlandósággal rokon.

Minden portfólió $VaR\%$ -a a rajta átmenő közömbösségi görbe által képviselt $VaR\%$, ezt pedig a hozam tengelymetszeten tudjuk legkönnyebben leolvasni. Egy $VaR\%^*$ közömbösségi görbétől észak-nyugatra fekvő portfólió $VaR\%$ értékei mind magasabbak $VaR\%^*$ -nál, így a befektető számára hasznosabbak. Az izo- $VaR\%$ görbék a közömbösségi görbék megfelelő rendszerét alkotják, nem metszik egymást, észak-nyugati irányban egyre magasabb hasznosságot képviselnek, és minden portfólió rajta fekszik egy görbén. A $VaR\%$ alapú hasznosság tehát teljes, reflexív és tranzitív, így minden a hasznossági fogalmakkal szemben támasztott kritériumot teljesít. Még egy említésre méltó eredménye, hogy egy kockázatmentes hozamú állampapír $VaR\%$ -a egyenlő magával a hozamával.

1. táblázat

Az alfa és a kockázati averzió közötti kapcsolat

Alfa	Meredekség	Kockázati averzió
$\alpha \rightarrow 1$	$\rightarrow \infty$	Végtelenül kockázatelutasító
$\alpha > 0,5$	Pozitív	Kockázatkerülő
$\alpha = 0,5$	Nulla	Kockázatsemleges
$0 < \alpha < 0,5$	Negatív	Kockázatkedvelő

3 A hagyományos hozam-szórás tér a vízszintes tengelyen a szórást, a függőlegesen a várható hozamot ábrázolja, így a jobbra a szórás növekedését jelenti.

4 A standard normális eloszlás inverzéből a szokásos 95; 97,5 és 99 százalékos konfidenciaszintekre a közömbösségi görbe meredekségei sorrendben: 1,645; 1,96 és 2,326.

A portfóliókiválasztási elméletben alkalmaznak néhány egyszerű közömbösségi görbét. A legegyszerűbb az, amely a hasznosságot a várható hozam és a variancia függvényeként adja meg, képletszerűen: $U = m - 0,005A\sigma^2$, ahol A a kockázatelutasítás mértékét jelző paraméter.⁵ E fenti hasznossági megközelítés hasonlóan viselkedik, mint a korábban leírt VaR%-on alapuló koncepció. Mindkét preferenciarendezés esetén a kockázatelutasítóbb befektető görbéi meredekebbek. Mindkét esetben a befektető két portfólió közül a rajtuk átmenő közömbösségi görbék tengelymetszetei alapján rangsorol. Jelen esetben ezt **kockázatmentes egyenértékesnek** hívjuk, míg az előbb ez maga a portfólió VaR%-a volt. A kockázatmentes befektető esetén a két megközelítés

azonos képet mutat, ekkor $A = SN^{-1}(0,5) = 0$, a görbék vízszintesek.

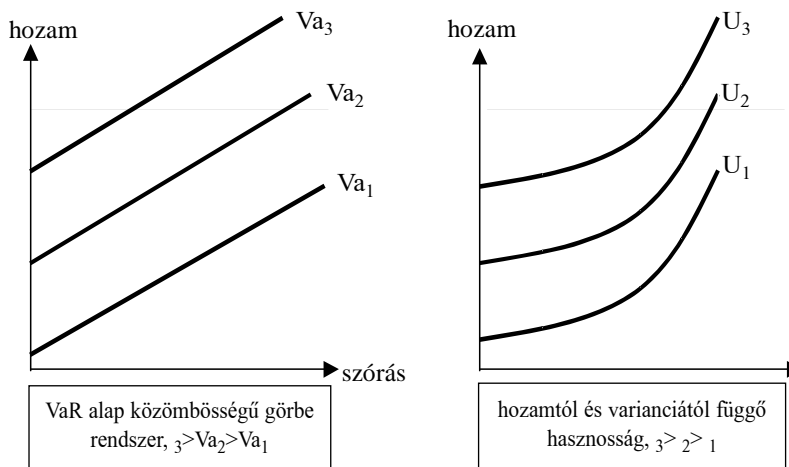
A két koncepció közötti különbség, hogy a VaR%-közömbös befektető minden pótlólagos kockázatonövekményért azonos nagyságú hozamnövekménnyel is beéri, míg a másik egyre növekvő hozamtöbblettel elégszik csak meg. A mikroökonómiából átvett terminológiával az utóbbi preferenciái szigorúan konvexek, míg a VaR%-orientált befektető preferenciái csak konvexek.

AZ IZO-VAR% GÖRBÉK HASZNÁLATA PORTFÓLIÓ-KIVÁLASZTÁSRA

Harry Markowitz⁶ 1952-es – azóta a vállalati pénzügyek alapművévé vált – cikkében feltételezte, hogy minden befektető-

1. ábra

Közömbösségi görbék két koncepciója



5 Befektetések [1996] 137. oldal. Az A értékét a tanulmányok általában 2 és 4 közé helyezik, a nagyobb A érték inkább kockázatterülő befektetőt tükröz.

6 MARKOWITZ, HARRY [1952]: Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 1952 March, 77–91. oldal.

nek létezik egy várható hozamtól és varianciától függő hasznossága [$U(E,V)$, $\partial U/\partial E > 0$, $\partial U/\partial V < 0$]. Ha ilyen létezik és meghatározható, akkor behelyettesítve minden lehetséges portfólió paramétereit, megtalálhatjuk a legnagyobb hasznosságot. Markowitz igazi áttörést abban hozott, hogy ezt a nagy munkát megkönnyítette azzal, hogy nem kell az összes, csak a **hatékony portfóliók** paramétereit behelyettesíteni.

VaR esetében sem más a helyzet. Egy VaR%-optimalizációt alkalmazó befektető megteheti, hogy az összes lehetséges portfólió kockázatos értékét kiszámítja, és ebből kiválasztja a legnagyobb VaR% értékűt, ami a legnagyobb U hasznosságú is.⁷ De Markowitz módszerét ezúttal is alkalmazni lehet. Ehhez be kell látni, hogy minden VaR optimalizáció eredménye hatékony portfólió és hogy minden hatékony portfólió előállítható VaR% optimalizáció eredményeképpen.

A VaR%-ot maximalizáló cselekvését a következő szabály írja le:

$\max[m - SN^{-1}(\alpha)\sigma]$, ez adott várható hozam mellett:

$$m + \max[-SN^{-1}(\alpha)\sigma]$$

$$m + \min[SN^{-1}(\alpha)\sigma]$$

$$m + SN^{-1}(\alpha)\min[\sigma]$$

Ezek szerint a VaR% maximalizáló adott hozam mellett minimalizálja a szórás mellett maximalizálja a várható hozamot. Mivel a szórás pozitív, így annak minimalizálása a variancia minimalizálását is jelenti. Ilyen eljárás pontosan megegyezik Markowitz hatékony port-

fóliókat kereső módszerével. Ezek szerint VaR% maximalizálás csak hatékony portfóliót eredményezhet.

Minden egyes hatékony portfólió lehet VaR% alapú optimalizáció eredménye. A lehetséges portfólió halmaza szigorúan konvex, így a hatékony portfóliók halmaza a szórás tengelyre konkáv. Egy adott hatékony portfólió annak a befektetőnek lesz optimális portfóliója, akinek izo-VaR% görbéjének meredeksége pontosan a hatékony portfóliók görbéjének adott portfóliónál vett meredeksége. Mivel a hatékony portfólió görbéje a globálisan legkisebb kockázatú portfóliótól felfelé lévő határoló görbéje a lehetséges portfóliók halmazának, ezért a görbe minden pontban vett meredeksége pozitív. A közömbösségi görbék meredeksége szintén befutja a pozitív valós számok halmazát, ahogy alfa 0,5-ről 1 felé tart, így az összes hatékony portfólió valamely alfa szintet választó befektető optimális portfóliója lesz. A fenti kétoldalú bizonyítás szerint egyértelmű megfeleltetés van a kockázati averziót jelző alfa paraméter és a hatékony portfóliók halmazának elemei között.

Geometriailag egy VaR%-ot maximalizáló nem tesz mást, mint egy normál befektető, vagyis keresi a lehetséges portfóliók halmazát (költségvetési halmaz) még érintő legmagasabban fekvő izo-VaR% görbét, azaz differenciálhatóság esetén megkeresi a hatékony portfóliók görbéjének azon pontját, ahol a görbe meredeksége $SN^{-1}(\alpha)$. Az érintési pont által reprezentált tulajdonságú portfólió lesz számára az optimális befektetés.

A VaR%-maximalizálás racionális befektetési döntési mechanizmusnak bizo-

⁷ Mivel az U függvény szigorúan monoton növekvő.

nyul a kockázatos értékpapírok világában. A továbbiakban azt vizsgálom, hogyan viselkedik e befektetési döntési módszer a kockázatmentes befektetési lehetőség bekapcsolásával.

A KOCKÁZATMENTES ESZKÖZ ÉS A VAR%-OPTIMALIZÁCIÓ

A kockázatmentes befektetési lehetőség bevonása a vizsgálati keretbe a hatékony portfóliók halmazát az eddigi konkáv felületről egy affín felületre változtatja. A hozam-szórás térben a hatékony portfóliók halmazát tőkepiaci egyenesnek (CML) nevezzük, amely a hozam tengelyt a kockázatmentes kamatlábnál (r_f) metszi. A befektető dolga továbbra is csak az, hogy a hatékony portfóliók halmazából kiválassza a számára legkedvezőbbet. Ezt úgy teheti, hogy a CML egyenes azon pontját keresi, amely a legmagasabban fekvő közömbösségi görbén van. A klaszszikus esetben a közömbösségi görbe $[U = E(r) - 0,005A\sigma^2]$ szigorúan konvex, ezért pontosan egy megoldás lesz. Képlet-szerűen a keresett portfólió szórása a $0,01A\sigma = [E(r_m) - r_f]/\sigma_m$ egyenlet megoldása, ahol $[E(r_m); \sigma_m]$ a piaci portfólió várható hozama és szórása. Az egyenlet az A értékétől függően más és más megoldást eredményez a befektető kosarában állampapírból és piaci portfólióból. Bármilyen kockázatkerülő befektető portfóliójában lesz állampapír (vagy ilyen kamatú hitel) és kockázatos piaci portfólió is. A kockázatkerülési szint (A) csak ezek arányát befolyásolja.

Mint láttuk, a VaR% maximalizálásán alapuló döntéshozatal egy lineáris közöm-

bösségigörbe-rendszert implikált. Egy lineáris közömbösségi görbe valódi portfóliót eredményezett konkáv hatékony portfóliógörbe mellett, de sarokponti, vagy szélsőségesen kockázatos megoldást preferál affín hatékony halmazon.

1. Ha a közömbösségi görbe meredeksége $SN^{-1}(\alpha)$ meghaladja a CML meredekségét: $[E(r_m) - r_f]/\sigma_m$ az azt jelenti, hogy a fogyasztó kockázatkerülőbb, mint a piac átlaga, vagyis minden szinten csak nagyobb addicionális várható hozamért cserélne el egységnyi többletszórást, mint amennyit a piac ad. Így a piac által ajánlott cserearányon kockázattól szabadul meg, és hozamot ad vele. Egy ilyen cserével nő a VaR%-a, ezáltal a hasznossága. Ezt a cserét addig folytatja, míg a csere határhaszna pozitív. De mivel a két „görbe” egyenes, így a nyert haszon mindig felülmúlja a veszteséget. A csere addig folytatódik, amíg van még kockázat. E miatt a számára legelőnyösebb a lehető legkisebb kockázat, vagyis a tisztán állampapír portfólió.
2. Ha a meredekségek fordítottak $\{SN^{-1}(\alpha) < [E(r_m) - r_f]/\sigma_m\}$, vagyis a közömbösségi görbe laposabb, mint a tőkepiaci egyenes, akkor a befektető mindig növelheti hasznosságát, ha a piac által kínált kockázat-hozam cserearányon hozamot vásárol kockázatért. Az ezért rárótt kockázati többlet ellenéri is nő a portfóliója VaR%-a. Az általa elfogadhatónak tartott árnál (hozamban mérve) többet kínál a piac egységnyi többlet-kockázatért. Mivel a görbék relatív meredeksége nem változik a csere következtében, a csere folytatódik. Ennek kö-

vetkezménye, hogy a VaR% nagysága alapján döntő befektető korlátlanul növeli portfóliója hozamát és szórását. Ezt úgy teheti meg, hogy kockázatmentes kamatlábon hitelt vesz fel, és tőkeáttételes portfóliót hoz létre. A tőkeáttételes portfóliót hoz létre. A tőkeáttételes mértéke az optimalizálás eredményeként végtelen nagyra válik.

3. Ha egy befektető közömbösségi görbéjének meredeksége megegyezik a tőkepiaci egyenes meredekségével:

$$SN^{-1}(\alpha) = [E(r_m) - r_f] / \sigma_m$$

$$\alpha = SN\left(\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m}\right),$$

akkor az alfa megegyezik a standard normális eloszlás kockázat piaci⁸ ára

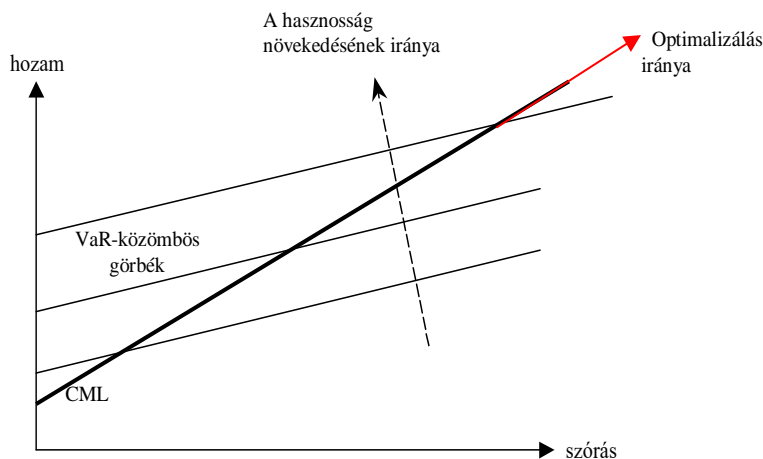
helyen vett értékével. Az ilyen alfa által jellemzett befektetőnek az összes CML-en fekvő portfólió közömbös, mindnek $VaR\% = r_f$ a kockázatos értéke, így $U(r_f)$ a hasznossága. Ebben az esetben a befektető véletlenszerűen választ a CML portfóliói közül.

Ezek szerint a befektetőket portfólióválasztásuk alapján három csoportra lehet osztani. Minden befektető kockázatkerülési hajlandóságát jellemzi egy alfa paraméter. Azon befektetők, akiket jellemző alfa paraméter értéke a standard normális eloszlás kockázat piaci ára helyen felvett értéke

$$[\alpha_i < \alpha^* = SN\left(\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m}\right)]$$

2. ábra

Optimalizálás folyamata CML-nél laposabb közömbösségi görbékkel rendelkező befektető esetén



- 8 A kockázat piaci ára bevett terminológia a piaci portfólió többlethozama a kockázataára vetítve, vagyis a kockázat egységára. Képletben kifejezve:

$$\left(\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m}\right)$$

alatt van, azok a lehetőségekhez mérten maximális kockázatos és hozamú portfóliót választanak. Ha lehetőség van hitelfelvételre kockázatmentes kamatlábon, akkor végtelen kockázatos értékpapírkosarat vá-

lasztnak. Azon kevés befektető, aki alfa paramétere pontosan a fenti α^* értékkel egyezik meg ($\alpha = \alpha^*$), azok nagy valószínűséggel megosztják vagyoniukat állampapír és piaci portfólió tartása között, de számukra a kettő bármilyen kombinációja közömbös. Az α^* -nál nagyobb kockázatelutasítási paraméterrel jellemzett befektetők ($\alpha > \alpha^*$), adott piaci körülmények mellett szélsőségesen kockázatkerülőkké válnak és teljes befektetési portfóliójukat állampapírba fektetik. Ez utóbbiakat nem nevezhetjük teljesen kockázatelutasítóknak, mert a piaci kockázati ár változásával átrendezhetik portfóliójukat.

E fejezet eredménye, hogy a befektetőket cselekvésük alapján három csoportra lehet osztani, abból kettő csoport szélsőségesen viselkedik, a harmadik véletlenszerűen. A kockázatelutasítás mértékét jelző alfa paraméter változása nem a kockázatmentes és a kockázatos befektetési eszközök súlyának fokozatos változását vonja maga után, hanem vagy kategóriaváltást, és így a portfólió drasztikus átrendezését, illetve kategóriában maradást és így a cselekvés hiányát. A tőkepiaci egyenes változása, így például a kockázatmentes kamat csökkenése feltehetőleg néhányakat teljes állampapír-portfóliójuk likvidálására és helyette részben hitelből piaci portfólió vásárlására késztet. A klasszikus elméletben a piaci árváltozások, vagy kockázati averzió folytonos változása az egyéni portfóliók összetételének folytonos változását vonták maguk után. Egy VaR% maximalizálása mellett döntő, vagy arra készített befektető illetve bank reakciója a folytonos változásokra nem folytonos, hanem szélsőséges.

NORMALITÁSI DISZKUSSZIÓ

Mint már számos empirikus vizsgálat bebizonyította, az értékpapírok hozameloszlása ritkán normális. A hozamok eloszlását jobban írják le a *Levy-eloszlások*, amelyek szórása nem véges, így a hagyományos kockázatmérésre a szórást nem lehet használni. A hozamok eloszlása a tapasztalat szerint leptokurtikus, vagyis a normális eloszlásánál gyakoribban az átlagtól való nagy és az apró eltérések, míg az átlagos eltérés kevésbé valószínű. Ennek különösen nagy jelentősége van a kockázatotott érték számításában, ahol a hozam eloszlásának 'farkát' elemezzük. Ebben a részben az előzőekben felvázolt problémákat mutatom be más megközelítésben, amely nélkülözi a hozamok eloszlására tett normalitási feltételezést. Az alfejezetben megtartjuk a folytonos oszthatóság feltételét, a hozamok eloszlását pedig szimmetrikusnak és egymódusúnak tételezzük fel. Ez a levezetés természetesen felöleli a hozamok normális eloszlásának lehetőségét is, tehát az előző levezetésnél általánosabb.

Szórás hiányában vissza kell térnünk a VaR általános meghatározásához. Egy portfólió VaR%-a az a hozam, amelynél a portfólió adott időszak alatt alfa valószínűséggel többet hoz. Ez nem más, mint az a hozam ameddig balról integrálva a hozam sűrűségfüggvényét $(1-\alpha)$ -t kapunk, azaz az eloszlásfüggvény értéke $(1-\alpha)$.

$$1 - \alpha = F(\text{VaR}\%)$$

$$F^{-1}(1 - \alpha) = \text{VaR}\%$$

ahol $F(?)$ az adott portfólió hozamának eloszlásfüggvénye. Két portfólió közül a

VaR%-ot maximalizáló befektető azt választja, amelyik hozamának eloszlásfüggvénye később, nagyobb hozamnál éri el az általa választott $(1-\alpha)$ -t. Az eredményül kapott VaR% értéknél a preferált portfólió hozameloszlása alacsonyabb értéket vesz fel, $(1-\alpha)$ -t, mint a diszpreferált hozamának eloszlásfüggvénye, vagyis a másik portfólió legalább ekkora veszteséget nagyobb valószínűséggel szenved el.

A TŐKEÁTTÉTEL HATÁSA

A tőkeáttétel (k) a befektetett összeg osztva a saját tőkével. A tőkeáttételes portfólió hozama – mint valószínűségi válto-

zó – az alapporfólió hozamának transzformáltja: $\xi' = k\xi - (k-1)r_f$. Egy portfólió tőkeáttétellel való megvalósítása a hozam sűrűségfüggvényét úgy transzformálja, hogy a várható érték hozamprémiuma k -szorosára nő, emellett a hozam szórása (amennyiben létezik) vagy terjedelme szintén k -szorosára nő:

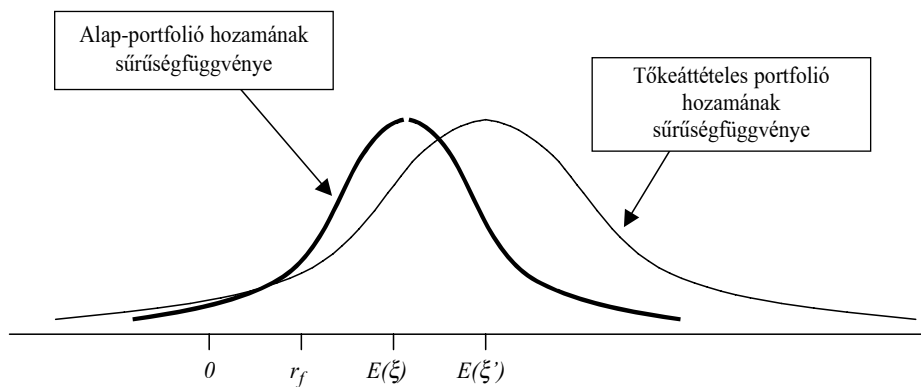
$$E(\xi') = r_f + k*[E(\xi) - r_f],$$

$$D(\xi') = k*\sigma_p$$

A tőkeáttételes portfólió eloszlásfüggvénye kezdetben nagyobb (főltte van, nagyobb értékeket vesz fel), mint a tisztán saját portfólió eloszlásfüggvény. Ennek magyarázata, hogy az áttételezés miatt a

3. ábra

A tőkeáttétel hatása a befektetett összegre vetített hozam sűrűségfüggvényére



saját tőkerészre vetített extrém nagy veszteségek előfordulási valószínűsége nagyobb. A 0,5-ös kumulált valószínűséget mindkettő a saját várható értékénél éri el.⁹

⁹ A sűrűségfüggvény szimmetriája miatt a medián és a várható érték egybeesik.

Ha a piaci portfólió hozamának várható értéke (r_m) meghaladja a kockázatmentes kamatlábat (r_f) (mint általában), akkor a tőkeáttételes portfólió várható hozama $[r_f - k(r_m - r_f)]$ a nagyobb. Így ez utóbbi a 0,5-ös értéket egy, a piaci portfólió várható hozamánál magasabb hozamnál, vagyis

attól jobbra éri el. Ennél a hozamszintnél, már a piaci portfólió eloszlásfüggvénye nagyobb. A két függvény folytonossága és szigorú monotonitása miatt a Bolzano-tétel segítségével beláthatjuk, hogy a két eloszlásfüggvény egy és csak egy helyen metszi egymást. A metszéspontban a két függvényérték megegyezik, ami azt jelenti, hogy azt a bizonyos hozamot a tőkeáttételes és az eredeti portfólió hozama azonos valószínűséggel haladja meg, vagy múlja alul. Ha a metszésponthoz tartozó valószínűség eggyel vett komplementerét használnánk konfidenciaszintnek a VaR% kiszámításához, akkor a két portfólió kockázatot értéke azonos lenne. Ha ennél a szintnél nagyobb konfidenciaszintet választ a befektető, akkor az egyik, ha kisebb, akkor a másik portfóliót választja. A metszéspont helye mint látjuk kitüntetett, ezért keressük x -et, ahol x -re teljesül, hogy:

$$\begin{aligned} P(\xi < x) &= P(\xi' < x) \\ P(\xi < x) &= P[k\xi - (k-1)r_f < x] \\ F(x) &= F\left[\frac{x + (k-1)r_f}{k}\right], \end{aligned}$$

a szigorú növekvő monotonitás miatt:

$$\begin{aligned} x &= (x + (k-1)r_f) / k \\ kx &= x + (k-1)r_f \\ (k-1)x &= (k-1)r_f \\ x &= r_f \end{aligned}$$

A levezetés eredménye szerint egy P portfólió hozamának eloszlásfüggvénye pontosan a kockázatmentes kamatlábnál egyezik meg a P portfóliót tőkeáttétellel megvalósító befektetés saját részre vetített hozamának eloszlásfüggvényével. Az

eredmény jelentősége, hogy a metszéspont helye független a tőkeáttétel mértékétől. Most már tudjuk, hogy a kockázatmentes kamatlábnál kisebb hozamok mellett a tőkeáttételes portfólió eloszlásfüggvénye a nagyobb értékű, míg r_f -nél nagyobb hozamoknál az eredeti portfólió eloszlásfüggvényének értékei a magasabbak.

A VaR% MAXIMALIZÁLÁSA

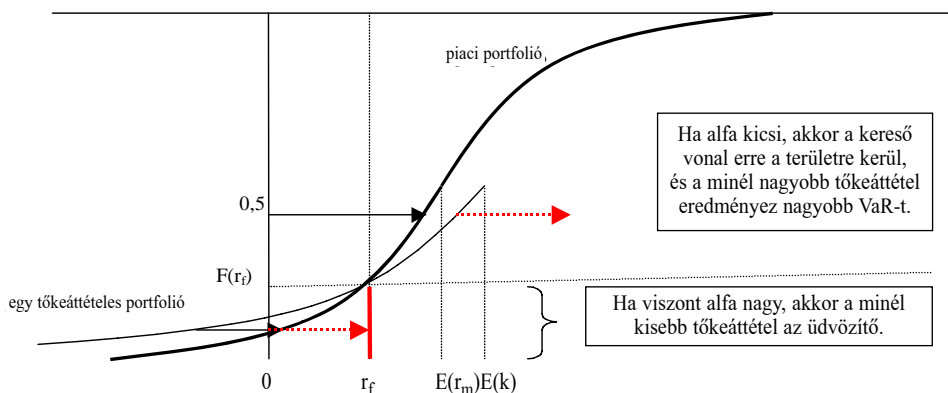
A fenti eredmény tudatában a portfólióválasztás leegyszerűsödik. A maximális hasznosságú, így VaR%-ú portfólió keresése geometriai bemutatással a legszemléletesebb. A befektető rendelkezik egy kockázatkerülését jellemző α paraméterrel. A cselekvési szabály szerint az $1-\alpha$ értéknél húz egy szintvonalat a koordináta-rendszerben. Berajzolja a hatékony portfóliók hozamainak eloszlásfüggvényeit. Ezek mind a CML elemei, a piaci portfólió tőkeáttétellel vagy állampapírral való kombinálással létrehozott portfóliók, így eloszlásfüggvényeiket a fent leírtak jellemzik. Mindegyik az $[F(r_p); r_f]$ pontban metszi a többit, ahol $F(?)$ a piaci portfólió hozamának eloszlásfüggvénye. Mivel $VaR\% = F^{-1}(1-\alpha)$, a befektető megkeresi azt az eloszlásfüggvényt, amely az $1-\alpha$ vízszintes egyenest a lehető leginkább jobbra, vagyis legmagasabb értéknél metszi. Ez az érték az adott portfólió VaR%-a. Mivel ez a VaR% a lehető legmagasabb, így a befektető e portfólió választásával a lehető legnagyobb hasznosságot érti el. Ez a VaR% maximalizálás módszere általános esetben, tőkepiaci egyenes létezése mellett.

Ha a befektető alfa értéke olyan, hogy $1-\alpha < F(r_f)$, akkor a fenti levezetés értelmében a VaR% maximalizálás a minél kisebb tőkeáttétel irányába való elmozdulást jelenti. Ez a kizárólag állampapírból álló portfólió választásához vezet. Ha a befektető alfa értéke szerint $1-\alpha = F(r_f)$, akkor az összes lehetséges eloszlás ugyan

annál az értéknél metszi a kereső-egyenesét. A piaci portfólió és az állampapír bármilyen kombinációja ugyan akkora hasznosságot okoz neki, így a választás közömbös. Ha egy befektető azon csoportból való, akiknek $\alpha < 1-F(r_f)$, akkor ő a tőkeáttétel minden mértéket meghaladó növelésében érdekelt.

4. ábra

Optimalizálás folyamata nem normális eloszlás esetén



Az alfejezet konklúziója azonos az előző alfejezetével. Annyival többet tudunk meg, hogy a normalitás elvetése nem szünteti meg a jelenséget. A jelenség továbbra is az, hogy egy kitüntetett alfa értéknél nagyobb konfidenciaszintet választó befektetők csak állampapírt vesznek, annál kisebbet választók extrém kockázatu portfólió hoznak létre, míg $1-F(r_f)$ -fel pontosan egyező szignifikancián VaR%-ot maximalizáló befektető véletlenszerűen osztja meg pénzét államkötvény és piaci portfólió között.

Az eredmény könnyen specifikálható újra normális eloszlásra. Az átalakítást

az állampapírt vásárlók példáján mutatom be:

$$1-\alpha < F(r_f), \text{ ahol } F \sim N(m; \sigma)$$

$$1-\alpha < F(r_f) = N_{m, \sigma}(r_f) =$$

$$= SN \frac{r_f - m}{\sigma}$$

$$1-\alpha < SN \frac{r_f - m}{\sigma}$$

$$\alpha > SN \frac{m - r_f}{\sigma}$$

Ami azonos a normális esetben levezetett eredménnyel.

KONKLÚZIÓ

Az előző fejezet tanulsága a következőkben foglalható össze:

Egy befektető, aki

- kockázatkerülő és
- külső vagy belső indíttatásból portfóliója hasznának maximalizálásához annak kockázatos értékének maximalizálását használja, egy tőkepiacon, ahol
- az értékpapírok folytonosan oszthatóak,
- az értékpapírok hozamának eloszlása egy szimmetrikus sűrűségfüggvénnyel jól jellemezhető,

portfólióját vagy csak állampapírból, vagy csak piaci portfólióból állítja össze. A portfólió megosztása e két összetevőre csak feltehetően marginális számú befektető számára előnyös, és az ő vagyonompozíciójuk véletlenszerű. Az, hogy egy befektető a fenti két nagy csoport melyikébe tartozik, attól függ, hogy milyen a kockázatvállalási hajlandósága. Ezt pedig az általa választott konfidenciaszint és mérési időtáv jelzi. A magasabb konfidenciaszint és a rövidebb tartási periódus nagyobb mértékű kockázatalutasításra utal.

A dolgozat a kockázatos érték veszélyeire szándékosan rámutatni. Mint említettem, a VaR használata vagy a szabályozásba való integrálása könnyen oda

vezethet, hogy a mutatót egy befektetés jellemzésére használják.

A hozam pozitívítása, és az eloszlások normálistól eltérő volta miatt a maradék $1-\alpha$ százalék nem arányos magával a VaR-ral. Ha az említett kettő lehetőséget kizárom, akkor a VaR jó mutató, és a konfidenciaszint és idő tudatában ismerem a teljes eloszlást, és a maradék jellemzőit is. De ez a két feltétel igenis releváns és nem elhanyagolható. A két feltétel mellett a „túlsordulás” kerülhet a betétesek pénzének teljes elvesztésébe vagy pusztán pótlólagos tőkeemelésbe. A szűnyogháló öt százalékos lyukán lehet, hogy ártatlan muslica jön be, de lehet, hogy a legádázabb vérszívó. Éppen ezért a konfidenciaszint megválasztása nem lehet egy hatóság vagy szokás dolga. A megfelelő konfidenciaszint kiválasztása legalább olyan fontos része a kockázatkezelésnek, mint a VaR érték számítása maga. A konfidenciaszintnek tükröznie kell a maradék $1-\alpha$ eset jellemzőit, az abban a kis részben elszenvedett veszteség okozta kárt. Vagyis szükséges egy ’hasznossági függvény’ a maradék néhány százalék bekövetkeztére. Az eloszlás farkának várható értékét pedig érdemes szintén a jelentés részeként tekinteni, hisz ez árulkodik arról, hogy a tőke elvesztése esetén a betétesek vagyonának hányada vesz el.

IRODALOMJEGYZÉK

A SZABÁLYOZÁSRÓL

1. 1996. ÉVI CXI. TÖRVÉNY Az értékpapírok forgalomba hozataláról, a befektetési szolgáltatásokról és az értékpapír-tőzsdéről.
2. 1996. ÉVI CXII. TÖRVÉNY A hitelintézetekről és a pénzügyi vállalkozásokról
3. A KORMÁNY 244/2000. (XII. 24.) RENDELETE a kereskedési könyvben nyilvántartott pozíciók fedezetéhez szükséges tőkekövetelményéről és a kereskedési könyv vezetésének szabályairól.
4. MÉRŐ KATALIN [1998]: A tőke megfelelés új generációs szabályainak szükségességéről. Bankról, pénzről,

tőzsdéről; Válogatott előadások a Bankárképzőben. *Bankárképző*, 164–173. oldal.

**A KOCKÁZATVÁLLALÁS–BIZONYTALANSÁGBAN HOZOTT
DÖNTÉSEK ELMÉLETEIRŐL:**

5. ARROW, KENNETH JOSEPH [1951]: Döntés kockázat vállalásával: a különböző elméleti irányzatok, magyarul megjelent: Egyensúly és Döntés, *KJK*, 335–367. old., Budapest 1979.
6. BERNSTEIN, PETER L. [1998]: Szembeszállni az istenekkel. A kockázatvállalás különös története. *Panem–Wiley*.
7. HIRSHLEIFER J. & RILEY J. G. [1992]: A bizonytalan-ságban hozott döntések elemei. A racionális döntések elmélete. *Osiris – Láthatatlan Kollégium*, 1998. 25–62. oldal.
8. KAHNEMAN D. & TVERSKY A. [1979]: Kilátáselmélet: A kockázatos helyzetekben hozott döntések elemzése. A racionális döntések elmélete. *Osiris – Láthatatlan Kollégium*, 1998. 82–113. oldal.
9. MARCH, JAMES G. [2000]: Bevezetés a döntéshozatalba. *Panem*.
10. NEUMANN, JÁNOS & MORGENSTERN, OSKAR [1944]: Theory of Games and Economic Behavior. *Princeton University Press*, 1953.
11. SZÁZ JÁNOS [1999]: Tőzsdei opciók vételre és eladásra. *Tanszék*.
12. TOBIN, JAMES [1958]: A likviditási preferencia mint a kockázattal szembeni magatartás, Pénz és Gazdasági Növekedés. *KJK* 1984, 41–74. oldal.

**A PORTFÓLIÓKIVÁLASZTÁS HAGYOMÁNYOS
ELMÉLETEIRŐL:**

13. BODIE–KANE–MARCUS [1997]: Befektetések. *Aula*.
14. BREALEY–MYERS [1998]: Modern Vállalati Pénzügyek. *Panem–McGraw-Hill*.
15. MARKOWITZ, HARRY [1952]: Portfólió selection. *The Journal of Finance*, 1952 March, 77–91. oldal.
16. MIKOLASEK ANDRÁS [2000]: Sztochasztikus módszerek a pénzügyekben. Tanítási segédanyag.

A KOCKÁZTATOTT ÉRTÉKRŐL:

17. BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Performance of Models-Based Capital Charges for Market Risk, 1 July–31 December 1998, 1999. szeptember
18. J. P. MORGAN BANK, 1996, negyedik kiadás „RiskMetrics – Technical Document” New York.
19. JORION, PHILIPPE [1999]: A kockáztatott érték. *Panem*.