122

ERGODELMÉLET ÉS KÖZGAZDASÁGTAN

Hozzászólás Bélyácz Iván cikkéhez

Simonovits András

Ebben a rövid hozzászólásban Bélyácz Iván tanulmányának (Bélyácz, 2017)[1] néhány gondolatát szeretném modellezni. A determinisztikus és a sztochasztikus dinamikai rendszerek elemeinek áttekintésével egyrészt az ergodicitás fogalmát próbálom jobban megvilágítani, másrészt rámutatok: nincs okunk feltételezni, hogy egy gazdasági rendszer ergodikus. Végül megmutatom, hogy a racionális várakozás determinisztikus változata milyen problémát okoz, amely elkerülhető a naiv várakozás esetén.

JEL-kódok: C61

Kulcsszavak: dinamikai közgazdaságtan, stabilitáselmélet, ergodicitás, racionális várakozások

1. DETERMINISZTIKUS DINAMIKAI RENDSZEREK

Mérlegeljünk egy diszkrét idejű determinisztikus dinamikai rendszert (Simonovits, 1998). Legyen $t = 0, 1, 2, \ldots$, az időszak indexe, $n \geq 1$ természetes szám a rendszer dimenziója, és $x_t \, \varepsilon \mathbf{R}^n$ a rendszer állapota a t-edik időszakban. Tegyük fel, hogy egy időben változó f_t függvény egyértelműen transzformálja az x_t állapotot az x_{t+1} állapotba:

$$x_{t+1} = f_t(x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

ahol az x_0 kezdőállapot adott. Ekkor egyszerű behelyettesítéssel adódik az ún. laplace-i determinizmus:

$$x_t = f_t(\ldots f_0(x_0)\ldots), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Szavakban: ha ismerjük egy rendszer kezdeti állapotát a $t = 0$ kezdő időszakban, akkor ismerjük a rendszer állapotát bármely jövőbeli időpontban.

Ez az elv különösen hatékony a természettudományban, ahol a transzformációs szabály általában időben állandó, más néven a rendszer *időinvariáns*:

$$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{1'}$$

1 Bélyácz Iván (2017): Az ergodicitás vitatott szerepe a (pénzügyi) közgazdaságtanban (*Gazdaság és Pénzügy*, 4. évf. 1. sz. 3–58. o.)

azaz

$x_t = f^t(x_0)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ (2’)

ahol f^t az időinvariáns f függvény t-szeres iteráltja.

Különlegesen fontos szerepet játszik az időinvariáns-determinisztikus dinamikai rendszerekben az *állandósult állapot* (egyensúly, fix pont), amely a transzformáció során helyben marad:

$x^0 = f(x^0)$. (3)

Reguláris rendszereknek lokálisan csak egy állandósult állapotuk van, de például az $x_{t+1} = x_t$ rendszernek minden állapota állandósult.

Gyakorlati jelentősége csak az *aszimptotikusan stabil* állandósult állapotnak van, amely közeléből induló pályák nemcsak közel maradnak e kitüntetett állapothoz, hanem aszimptotikusan tartanak is hozzá.

Legegyszerűbb dinamikai rendszer a *lineáris*, ahol megfelelő koordinátarendszerre áttérve,

$x_{t+1} = M x_t$, azaz $x_t = M^t x_0$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ (4)

Korlátos pályákra szorítkozva, az $n \times n$-es M mátrix domináns sajátértékének az abszolút értéke, a spektrálsugár legfeljebb 1 lehet: $\rho(M) \leq 1$. (Ki kell kötni még, hogy egyenlőség esetén az 1 abszolút értékű sajátértékek egyszeresek.) Az állandósult állapot 0, és aszimptotikus stabilitás esetén éles egyenlőtlenség áll: $\rho(M) < 1$.

Kitérő: ha figyelembe vesszük, hogy a kezdő állapot a gyakorlatban csak pontatlanul figyelhető meg, akkor már a legegyszerűbb egyváltozós *nemlineáris* (kvadratikus) leképezésnél is előrejelezhetetlen lehet a rendszer:

$f(x) = 4x(1-x)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ (5)

esetén az (1’) rendszer állapota az idő múlásával egyre kevésbé jelezhető előre. Ha az (x_t) pályához közelről induló (y_t) pályát tekintjük, akkor kezdetben a két pálya távolsága exponenciálisan nő:

$|x_t - y_t| > \lambda^t |x_0 - y_0|$, ahol $\lambda > 1$.

A korlátosság miatt a széttartás egy idő után megáll, majd újrakezdődik. Ekkor *kaotikus* dinamikáról beszélünk.

A természettudományoktól lemaradva, néhány év késéssel, 1980-tól a közgazdaságtanba is behatolt a kaotikus dinamika. A közgazdaságtanban azonban a káoszelmélet nem terjedt el igazán, mert a véletlen jelenségek fontosabbnak bizonyultak, mint a nemlineáris hatások.

2. MARKOV-LÁNCOK

Sztochasztikus folyamatra a legegyszerűbb nem triviális példa a *véges Markov-lánc*, ahol a jövőre a múlt csak a jelenen keresztül hat (*Rényi*, 1966). Egyelőre *homogén* láncra szorítkozunk. Matematikailag csak át kell értelmezni az időinvariáns lineáris rendszert: a (4)-beli $M \geq 0$ nemnegatív elemű mátrix $m_{ij} \geq 0$ eleme annak a valószínűsége, hogy a rendszer egy lépésben a j-edik állapotból az i-edik állapotba megy át. Itt $x_{j,t} \geq 0$ annak a valószínűsége, hogy a t-edik időszakban a rendszer a j-edik állapotban van. Képletben:

$$x_{i,t+1} = \Sigma_j \, m_{ij} x_{j,}. \tag{4'}$$

A teljes valószínűség tétele szerint bármely j-edik állapotból a rendszer valamilyen állapotba kerül, tehát a j-edik oszlopösszeg 1:

$$\Sigma_i \, m_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{4''}$$

Ebből következik, hogy $\rho(M) = 1$. Sőt, az állapotvalószínűségek összege is mindvégig 1:

Ha $\Sigma_i \, x_{i,0} = 1$, akkor $\Sigma_i \, x_{i,t} = 1$.

Ezzel az állapotteret az $n - 1$-dimenziós szimplexre korlátoztuk, és a 0 megszűnik állandósult állapot lenni. Belátható, hogy létezik legalább egy stacionárius eloszlás, vagy állapotvektor $x^0 > 0$: $x^0 = Mx^0$ – invariáns sajátvektor. De egy Markov-láncnak lehet akár végtelen sok stacionárius eloszlása is, például az elfajult $M = I$ (azonosságmátrix) esetben minden eloszlás stacionárius.

Most érkeztünk el Bélyácz tanulmányának központi fogalmához, az ergodicitáshoz: egy Markov-lánc *ergodikus*, ha akármilyen más eloszlásból indítsuk is a rendszert, az aszimptotikusan tart a stacionárius eloszláshoz. Ebből következik, hogy egy ergodikus Markov-láncnak csak egyetlenegy stacionárius eloszlása létezik. Most példát adunk nem ergodikus Markov-láncra.

Vegyük a következő 2-dimenziós M mátrixot: a főátlóban 0, a keresztátlóban 1 áll.

Ekkor a dinamika

$$x_{1,t+1} = x_{2,t} \qquad \text{és} \qquad x_{2,t+1} = x_{1,t},$$

azaz

$$x_{1,t+1} = x_{1,t-1} \qquad \text{és} \qquad x_{2,t+1} = x_{1,\,t-1},$$

ez *2-ciklikus* pálya, kivéve, ha $x_{1,0} = x_{2,\,0} = 1/2$ – stacionárius eloszlás. Ez a legegyszerűbb példa a nemergodikus rendszerre.

Belátható, hogy ha $M > 0$, azaz $m_{ij} > 0$ (i, $j = 1, ..., n$), akkor a Markov-lánc ergodikus. Ez a tétel könnyen igazolható a 2-állapotú esetben.

Az ergodicitás kapcsolatban van a tér- és az időátlag azonosságával. Ez a Markov-lánc esetében azt jelenti, hogy akármelyik állapotból indítjuk el a rendszert, aszimptotikusan x_i^0 valószínűséggel lesz az i-edik állapotban.

Eddig feltettük, hogy a Markov-lánc homogén, adott M átmenetmátrix származtatja az egymás utáni eloszlásokat. De ahogy a dinamikai rendszerekben is gyakori az idővariáns eset, ugyanúgy a Markov-folyamatokban is találkozhatunk időben változó átmenettel. Ekkor általában nem létezik stacionárius eloszlás, még inkább nincs ergodicitás. Mi zárná ki, hogy a gazdaságban is lennének inhomogén Markov-láncok?

3. RACIONÁLIS VÁRAKOZÁS

Az ergodicitás mellett a modern közgazdaságtanban nagy szerepet kap a racionális várakozás. Bemutatásához nincs is szükség sztochasztikus modellre, elegendő az 1. pontban bemutatott skalár determinisztikus dinamika, csupán elsőrendű helyett másodrendű rendszert vizsgálunk. (Ilyenkor szokás tökéletes előrelátásról vagy önbeteljesítő jóslatról beszélni.) Skalár állapotokra szorítkozunk, $n = 1$.

3.1. Dinamikai várakozással

A t-edik időszak x_t állapotát a $t - 1$-edik időszak x_{t-1} állapota mellett a $t + 1$-edik időszak állapotára vonatkozó x_{t+1}^e várakozás határozza meg:

$$F(x_{t+1}^e, x_t, x_{t-1}) = 0, \qquad t = 0, 1, 2, ... \qquad (7)$$

Racionális várakozás esetén az előrejelzés pontos: $x_{t+1}^e = x_{t+1}$. Ekkor (7) helyett

$$F(x_{t+1}, x_t, x_{t-1}) = 0, \ t = 0, 1, 2, ... \qquad (7R)$$

másodrendű differenciaegyenlet érvényes. Tegyük föl, hogy az állandósult állapot **0**:

$$F(0, 0, 0) = 0.$$

Ekkor az állandósult állapot menti linearizált rendszer

$$a_1 x_{t+1} + a_2 x_t + a_3 x_{t-1} = 0, \qquad t = 0, 1, 2, ... \qquad (8R)$$

ahol

$$a_1 = F_1'(0, 0, 0) \neq 0, \ a_2 = F_2'(0, 0, 0) \text{ és } a_3 = F_3'(0, 0, 0)$$

rendre a megfelelő parciális derivált. Explicitté téve a (8R) egyenletrendszert:

$$x_{t+1}= b_2 x_t + b_3 x_{t-1}, \qquad t = 0, 1, 2, ... \tag{9R}$$

adódik, ahol x_0 és x_{-1} kezdőértékek adottak.

Itt azonban fellép a *határozatlansági* probléma, amelyet már *Samuelson* (1958) is észrevett az együtt élő nemzedékek modelljében: x_0 ismeretlen. A főáramú közgazdaságtan képviselőit ez nem zavarja, és a következő fogással szabadulnak meg a problémától.

Ismert, hogy (9R) megoldása általános kezdőállapot-pár esetén

$$x_t= \xi_1\lambda_1^{\,t} + \xi_2\lambda_2^{\,t}, \qquad t =0, 1, 2,.... \tag{10R}$$

ahol λ_1 és λ_2 a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$\lambda^2= b_2 \lambda + b_3 =0, \tag{11}$$

ξ_1 és ξ_2 meghatározandó együtthatók.

Tegyük föl még, hogy mindkét gyök valós és $|\lambda_1|<1<|\lambda_2|$. Ekkor (10R)-ben a második tag felrobbanna, kivéve, ha $\xi_2 = 0$. Márpedig a világ nem robban fel, tehát elfogadjuk a feltevést. A megszorított

$$x_t= \xi_1\lambda_1^{\,t}$$

egyenletben a határozatlan ξ_1 együttható az $x_0= \xi_1$ kezdeti feltételből adódik.

Számomra ez a fogás elfogadhatatlan. Helyette az utóbbi évtizedekben eléggé lejáratott naiv várakozást javaslom, ahol a várható jövőbeli állapotot a jelen állapottal azonosítjuk:

$x_{t+1}^{\,e} = x_t$. Ekkor (8R) helyett

$$(a_1+a_2)\, x_t + a_3 x_{t-1} = 0, \qquad t = 0, 1, 2, ... \tag{8N}$$

adódik, ahol x_{-1} kezdőérték adott. Feltéve, hogy $a_1 + a_2 \neq 0$, a határozatlanság eltűnik. Explicit alakra térve:

$$x_t = c x_{t-1}, \qquad t = 0, 1, 2, ... \tag{9N}$$

Összefoglalva, az ergodicitás az időinvariáns-determinisztikus dinamikai rendszer stabilitásának sztochasztikus általánosítása. A társadalomtudományban sokkal kevesebb okunk van időinvarianciát feltételezni, mint a természettudományban. Ugyanakkor a racionális várakozás nagyon megszorító feltevés már determinisztikus esetben is.

HIVATKOZÁSOK

Bélyácz, I. (2017): Az ergodicitás vitatott szerepe a (pénzügyi) közgazdaságtanban. *Gazdaság és Pénzügy*, 4. évf. 1. sz. 3–58. o.

Rényi, A. (1966): *Valószínűség-számítás.* Budapest, Tankönyvkiadó.

Samuelson, P. A. (1958): An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money. *Journal of Political Economy* 66, pp. 467–482.

Simonovits, A. (1998): *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban*. Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.