LENCSÉS GYULA

A másodlagos magyar államkötvénypiac Value at Risk főkomponens-elemzése

Az alábbiakban főkomponens-elemzés segítségével vizsgálom a magyar másodlagos állampapír-piaci hozamgörbét, illetve annak változásait. Az irodalomban sok helyen leírt módon az adatsorokat három-négy főkomponens jól magyarázza, amelyek intuitíve viszonylag jól értelmezhetők, legalábbis az első két főkomponens esetében. A tanulmány további részében a főkomponens-elemzéssel kapott modellek alapvető szimulációs Value at Risk becslésre való alkalmasságát vizsgálom. Látható, hogy ezek az egyszerűbb módszerek alulbecslik a kockázatot, megfelelő pontosságú VaR-számításhoz további fejlesztésükre van szükség.

1. BEVEZETÉS

A hozamgörbe megváltozásainak vizsgálatához széleskörűen elterjedt statisztikai módszer[1] a főkomponens-elemzés (Principal Component Analysis – PCA). A főkomponens-elemzés olyan eljárás, amelynek célja alapvetően a vizsgált probléma dimenziójának csökkentése a különböző vizsgált változók közötti rejtett sztochasztikus összefüggések feltárásával.

Ebben a dolgozatban egészen pontosan a magyar másodlagos állampapírpiacon kialakult zérókupon-hozamgörbe adatait fogom vizsgálni, illetve megváltozásának jellemzőit próbálom feltárni, valamint az eredményeknek a Value at Risk-számításhoz való felhasználhatóságát elemzem.

Alapvető statisztikai módszerek alkalmazása nélkül is szembetűnő észrevétel a hozamgörbe megváltozásainak vizsgálatakor, hogy ezek jellemzően három különböző alakzatból állhatnak elő:

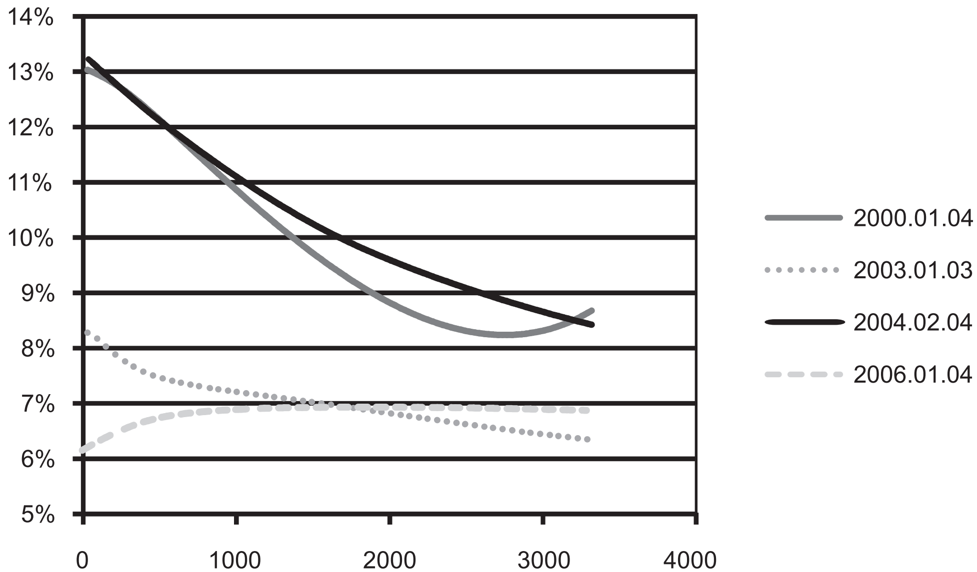
- A hozamgörbe párhuzamos eltolódása, szintjének megváltozása.[2]
- A hozamgörbe meredekségének megváltozása, azaz ellentétes irányú elmozdulás a rövidebb és a hosszabb lejáratokon.
- A hozamgörbe görbületének megváltozása, ami egyirányú változást jelent a nagyon rövid és a hosszú lejáratokon, és ezzel ellentétest a közepes lejáratokon.

1 A módszer elterjedtségét mutatja, hogy alapjait leírja HULL [2006] is. A módszer kockázatkezelési felhasználási lehetőségeit részletesen tárgyalja LORETAN [1997].

2 Vannak természetesen, akik ezzel nem értenek egyet. BARBER–COPPER [2010] például vitatja annak a statisztikai igazolhatóságát, hogy az első főkomponens általában a hozamgörbe szintjét határozná meg.

1. ábra

Zérókupon-hozamgörbe a másodlagos magyar államkötvénypiacon négy különböző napon



Forrás: Államadósság Kezelő Központ Zrt.

Az 1. ábrán a magyar zérókupon-hozamgörbe néhány év eleji napon fennálló alakja látható, amely igen sokféle lehet. Változhat a szintje, más lehet a meredeksége vagy a görbülete is. A hozamgörbeadatokon végzett főkomponens-elemzések során is általában ezek a faktorok azonosíthatók be, és remélhetőleg ezek a faktorok lesznek megfigyelhetők a magyar adatok esetében is. Számos tanulmány foglalkozik a zérókupon-hozamgörbe változásainak faktorokra bontásával. Széleskörűen vizsgálták a kérdést mind a felhasznált adatok időbeliségét, mind térbeliségét tekintve.[3]

2. A főkomponens-elemzés módszertana

A főkomponens-elemzés célja az, hogy egy sokváltozós adatsort az egyes változók mögötti, rejtett kapcsolatok feltárásával megpróbáljunk leírni egy kisebb dimenziós térben, minél kevesebb információ elvesztése árán.

3 A témával foglalkoznak például a tanulmányban más helyeken említetteken kívül a következő cikkek: Falkenstein–Hanweck [1997] kovariancia alapú hedge eredményeit veti össze a főkomponens-elemzés alapú hedge eredményeivel; Malava [2005] összehasonlító elemzést végez a GBP-, USD-, EUR-, JPY-piacokra Interbank Offer Rate adatok alapján; Tracey [2009] a jamaikai bankok jamaikai államkötvény-portfóliójának kamatlábkockázatát vizsgálja, Knez et al. [1994] egyes pénzpiaci eszközök hozamára épít faktormodellt.

Ha ezt sikerül megtennünk, akkor nyilvánvaló előnyként jóval egyszerűbbé válnak a további statisztikai vizsgálatok, elemzések: azokat kevesebb változóval kell végezni, így kisebb a számításigénye az egyes modellek becslésének. A főkomponens-elemzésnek ez az eredménye jól felhasználható a kockázatkezelési modellekben is.

További felhasználási lehetőség, hogy ha megpróbáljuk értelmezni a vizsgált adatsorunkat, keressük az összetartozó változókat, az azok között fennálló, első látásra nem nyilvánvaló összefüggéseket. Ezért is hívják a főkomponens-elemzést exploratív, vagy feltáró adatelemzési módszernek. Éppen fordítva is használhatjuk a módszert, ha az előzetesen fennálló elképzeléseinket a megfigyelések bizonyos egy tengely mentén megjelenő tulajdonságairól szeretnénk statisztikai módszerrel is igazolni.

Ez a felhasználási mód leginkább a társadalomtudományokban, szociológiában, illetve leginkább a pszichológiában fordul elő, ahol például az egyes személyiségjegyekre jellemző tulajdonságokra vonatkozó kérdéseket lehet jól leírni egy-egy főkomponens segítségével.

Érdekes módon, ehhez hasonló alkalmazási lehetőség adódik a pénzügyek területén a kamatlábak vizsgálatnál is, ahol a főkomponens-elemzés visszaigazolja azt a tézist, hogy a hozamgörbe alakja jól leírható három intuitíve könnyen értelmezhető komponenssel: a szinttel, a meredekséggel és a görbülettel.

A főkomponens-elemzés során a megoldandó feladat, hogy az eredeti sztenderdizált adatsor helyett az eredeti változók lineáris kombinációjaként előállított, kisebb számú változóval dolgozzunk, amelyek az eredeti adatsor varianciájának minél nagyobb részét adják vissza; tehát minél kevesebb információt szeretnénk feláldozni azért, hogy kisebb dimenziójú problémával dolgozhassunk tovább. Tehát ha **X** a sztendertizált adatmátrix, akkor

$$y=\mathbf{X}\boldsymbol{q} \qquad (1)$$

alakú, új változókat szeretnénk előállítani. További megkötések is szükségesek azonban a probléma egyértelmű megoldhatóságához. Megkívánjuk, hogy a $\boldsymbol{q}$ súlyvektor együtthatóinak négyzetösszege 1 legyen, valamint az egyes főkomponensek, azaz az eredeti adatsorból a fenti módon számított, új változók varianciája monoton csökkenjen. Belátható[4], hogy ekkor a probléma megoldását a korrelációs mátrix sajátvektorai adják. A legnagyobb varianciájú főkomponens a legnagyobb sajátértékhez tartozó, normált sajátvektorral való súlyozás esetén áll elő, a második legnagyobb varianciájú a második legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor használata esetén, és így tovább.

Természetesen, ha az összes sajátvektorhoz tartozó főkomponenst kiszámoljuk, akkor a dimenzió nem csökken, és információt sem veszítünk. Ha **Y** a főkomponensek adatmátrixa, akkor

$$\mathbf{Y}=\mathbf{XQ}, \qquad (2)$$

ahol **Q** oszlopai természetesen a fent említett sajátvektorok, **Y** pedig a főkomponensek értékeit tartalmazó mátrix. Ha a főkomponensekből szeretnénk visszakapni az eredeti adatsort – amire a VaR-becslés esetén szükség is lesz –, akkor **Q** mátrix inverzére lesz szükségünk. Mivel **Q** a korrelációs mátrix normált sajátvektoraiból áll, és a korrelációs mátrix szimmetrikus, így a lineáris algebrából ismert módon **Q** ortonormált, így inverze egyszerűen

4 A pontos levezetés megtalálható Füstös–Kovács–Meszéna–Simonné [2004]-ben.

a transzponáltja. Ha az eredeti adatsor visszaszámítását csak a legnagyobb sajátértékekhez tartozó főkomponensekből végeznénk, akkor egyszerűen **Q'** adott első néhány sorára lesz csak szükségünk. Az eredeti adatsorhoz persze még vissza kell szoroznunk a szórásokkal, és hozzá kell adnunk az adatokhoz az eredeti várható értéket a sztenderdizálás miatt.

3. A VIZSGÁLT ADATOK

Az általam feldolgozott adatok a magyar másodlagos állampapírpiacon kialakult kötvényárfolyamokból számolt zérókupon-hozamgörbe adatsorából származnak. Maga az adatsor egészen pontosan az Államadósság Kezelő Központ Zrt. (ÁKK) által számolt és nyilvánosságra hozott, elvben minden kereskedési napra kiszámolt hozamgörbe-adatsor, ami mindenki számára elérhető az ÁKK weboldalán.[5] Ez az adatsor egy adott napi kereskedési adatok alapján készült spline-becslés. Az általam vizsgált időszakban, 2000. januártól 2011. május közepéig az adatok lejárat tekintetében 28 naptól 3073 napig – valamivel több, mint 8 évig –, a 2001 decemberétől kezdődő időszakban pedig 4746 napig (tizenhárom évig) tartalmaznak adatokat 28 vagy 32 nap különbséggel egymás után, tehát tulajdonképpen havonta.

Sajnos, bizonyos napokra hiányzik az adatsor, így a változások vizsgálatánál csak azokat vettem be az elemzésbe, ahol legfeljebb három nap telt el a két megfigyelés között. Így összesen 2361 megfigyelés állt rendelkezésemre. Hogy a kapott modell mintán kívüli teszteléséhez is rendelkezésre álljanak adatok, a főkomponens-elemzés elvégzéséhez a 2008 végéig tartó adatsort használtam fel, az adatsor végét meghagyva az előbbi célra.

Az adatsorokat megvizsgáltam normalitás szempontjából. Ebből a célból a Jarque–Bera-tesztet használtam. A tesztek mind a kamatlábak, mind a kamatlábak megváltozása tekintetében minden vizsgált lejáratra, minden szokásos szignifikanciaszinten elvetik a normalitás hipotézisét. (A Jarque–Bera-teszt mellett ugyanez az eredmény a Kolmogorov–Szmirnov-próba használata esetén is.)

Vizsgáltam továbbá, hogy az adatok időben stacionáriusnak tekinthetők-e. Ehhez először a kibővített Dickey–Fuller-tesztet végeztem el. Ennek eredménye alapján a kamatlábak tekintetében a két évnél rövidebb és a nyolc évnél hosszabb lejáratokra nem lehet elvetni, hogy egységgyökfolyamatról van szó. A differenciák sorozatának esetében azonban már minden lejáratra minden szokásos szignifikanciaszinten el lehet vetni az egységgyök jelenlétét.

Elvégeztem a Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin stacionaritástesztet is. Ennek alapján a kamatlábakra minden lejáratra elvethető a stacionaritás nullhipotézise, míg a differenciák esetében 5%-os szignifikanciaszinten már egyik vizsgált lejáratra sem vethető el a nullhipotézis.

5 Az adatsorok letölthetők a http://www.akk.hu/zerokupon.ivy címről.

4. A kamatlábak főkomponens-elemzése

A kamatlábakra a főkomponens-elemzést először 13 év lejáratig (4746 napig) végeztem el, 3 év lejáratig (1099 napig) negyedévente választva a lejáratokat, a hátralévő időszakra pedig félévente, ez összesen harminchárom lejáratot jelent. Eddig a lejáratig 2001. december 4-től állt rendelkezésre adat, az adatsor végének pedig 2008. december 31-et választottam. Az időnként hiányos adatsor miatt így összesen 1598 megfigyelésből tudtam becsülni a modellt.

A főkomponens-elemzés alkalmazása során a vizsgálandó főkomponensek számának megválasztásához széleskörűen használt hüvelykujjszabály, hogy az egynél nagyobb sajátértékhez tartozó főkomponenseket vizsgáljuk.[6] Ezt a kritériumot alkalmazva, két főkomponenst kapunk erre az adatsorra. A két főkomponens együtt a teljes variancia 98,85%-át magyarázza meg, de egyedül az első főkomponens magyarázza a variancia 92,45%-át. Ezen túl minden egyes változó esetében 0,96 felettiek a kommunalitásmutatók[7], ami azt jelenti, hogy nincs olyan változó, amely varianciájának ne magyaráznák meg nagyon nagy részét a kiszámított faktorok, tehát két faktor igazán jól leírja az adatsort.[8]

Érdemes lehet megvizsgálni a harmadik főkomponenst is, ugyanis a szokásos modellekben három komponensre bontható a hozamgörbe: ez a korábban már említett szint, meredekség és görbület. Természetesen, ha megvizsgáljuk a harmadik főkomponenst, az nem befolyásolja az első kettőt, azok csak a korrelációs mátrixtól függnek, az pedig ilyenkor nyilvánvalóan nem változik.

A harmadik főkomponens csupán a varianciának körülbelül 0,9%-át magyarázza, így inkább elméleti szempontból érdekes, hogy valóban a várt tulajdonságokkal rendelkezik-e.

A *2. ábra* mutatja a főkomponensek és az egyes változók (vízszintes tengelyen lejáratok szerint növekvő sorban) közötti korrelációt. Ennek az ábrázolásnak egyéb esetekben nem sok hasznát vennénk, azonban – mivel itt egyértelműen sorba állíthatók a változók – a lejárati idő természetes sorrendet jelöl ki számukra; így itt jól látható, hogy mit is jelentenek az egyes főkomponensek, hogyan hatnak a hozamgörbe alakjára.

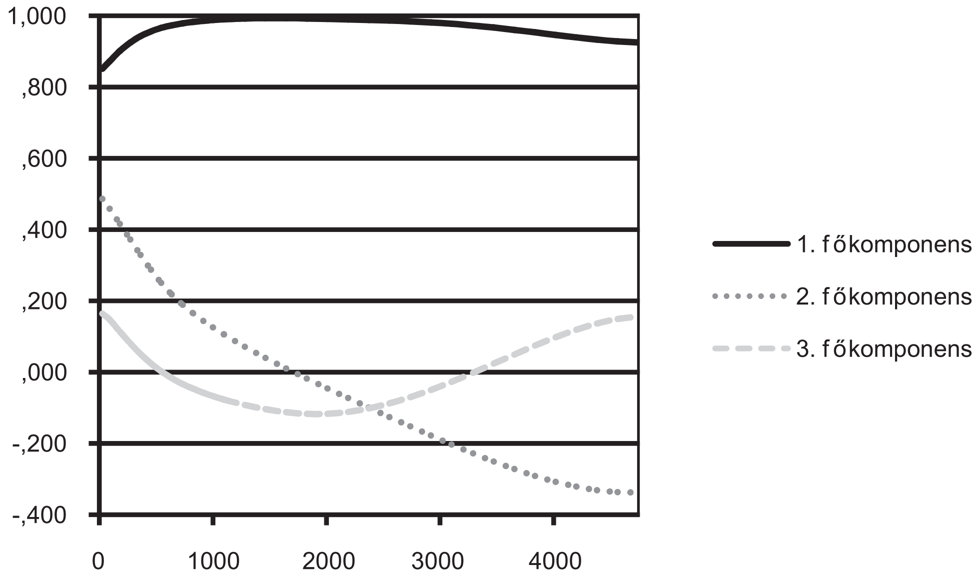
6 A főkomponensek kiválasztása természetesen jelentősen befolyásolhatja az eredményeket például a VaR-becslés esetében, ugyanis egy adott portfólió igen érzékeny lehet egy olyan főkomponensre, ami egyébként a hozamadatsor varianciájának csupán kis részét magyarázza. A kérdéssel foglalkozik például Kreinin et al. [1998].

7 A kommunalitásmutató értéke azt mutatja, hogy a bevont főkomponensek az eredeti változó varianciájának hány százalékát adják vissza.

8 Litterman–Scheinkman [1991] a témával foglalkozó egyik első tanulmányban az overnight repokamatláb feletti zérókupon-hozamprémiumokat vizsgálta. A vizsgált adatok ilyen módon különböznek az ebben a tanulmányban szereplőktől, azonban a kapott eredmények hasonlóak mind a faktorok alakjára, mind a magyarázott varianciahányadra vonatkozóan. Az első faktor az ő eredményeik alapján a variancia 89,5%-át, míg a második faktor a maradék 81%-át magyarázta. Kopányi [2009]-ben találhatóak számítások másodlagos állampapír-piaci hozamadatokra, az általa kapott eredmények hasonlítanak az ebben az elemzésben szereplőkhöz.

2. ábra

A kifejtett főkomponensek és az eredeti változók közötti korreláció a kamatlábak esetében



Az ábrából kivehető, hogy az első főkomponens erősen pozitívan korrelál az összes lejáratra vonatkozó kamatlábbal, ez mutatja a hozamgörbe szintjét. A második főkomponens pozitívan korrelál a rövid lejáratokkal, majd fokozatosan csökken a korreláció, ezután negatívvá válik, ez a hozamgörbe meredeksége. Negatívból pozitívba 1645 nap és 1827 nap között vált át a korreláció. A harmadik főkomponens ugyan nagyon keveset magyaráz a varianciából, azonban az előzetes várakozásoknak megfelelően viselkedik: a rövid lejáratokon pozitív a korreláció, majd körülbelül két évnél negatívvá válik, majd ismét pozitív lesz a hosszú lejáratokon, körülbelül a kilenc évnél hosszabb lejáratokra. Ez nem más, mint a hozamgörbe görbülete.

Ennek alapján tehát visszaigazolódtak az előzetes várakozások: az első három főkomponens a várt módon viselkedett, annyi különbséggel, hogy már az első két főkomponens is jól visszaadja a variancia nagy részét.

Jelentősen hosszabb időszak állt rendelkezésre, ha a lejáratokat csupán nyolc és fél évig (3073 napig) vizsgáltam. Ekkor az adatsor 2000. január 5-től 2008. december 31-ig tart, ez összesen 2060 darab megfigyelést jelentett, amelyet felhasználhattam a modell becsléséhez. A vizsgált lejáratok hat és fél évig (2373 napig) negyedévente követik egymást, ezután pedig félévente következnek egymás után, ez összesen harminc különböző lejáratot jelent.

Ebben az esetben is két főkomponenshez tartozik egynél nagyobb sajátérték. Ez a két főkomponens a teljes variancia 99,49%-át magyarázza meg, ami egy kevéssel magasabb, mint ami az előző esetben adódott, bár itt hárommal kevesebb változó szerepel az elemzésben. A harmadik főkomponens itt is igen keveset magyaráz a varianciából, még a teljes variancia fél százalékát sem, csupán 0,338%-ot.

Ebben az esetben is megvizsgáltam, hogyan viselkednek az egyes főkomponensek az eredeti változókkal való korreláció szempontjából; az eredmények szinte teljesen megegyeznek az előző esetben látottakkal.

5. A kamatlábak megváltozásainak főkomponens-elemzése

Az előbbiekben leírt elemzés célja az volt, hogy megvizsgáljam a felhasznált hozamgörbe-adatsoron, hogy azt jól leírja-e a szokásos három fő faktorra való felbontás. Az igenlő válasz után reménykedhetünk abban, hogy hasonló eredményt kapunk az elemzés fő célja tekintetében is, azaz a hozamgörbe megváltozásai is jól magyarázhatók viszonylag kis számú komponens segítségével.

Ahhoz, hogy erre megkapjam a választ, a fenti elemzést elvégeztem az előbbi adatsorok elsőrendű differenciáltjaira is, azaz a hozamok megváltozásaira. Ebben az esetben is többféle modellfelépítést vizsgáltam. Az alábbiakban ismertetem az egyes felépítéseknél kapott eredményeket.

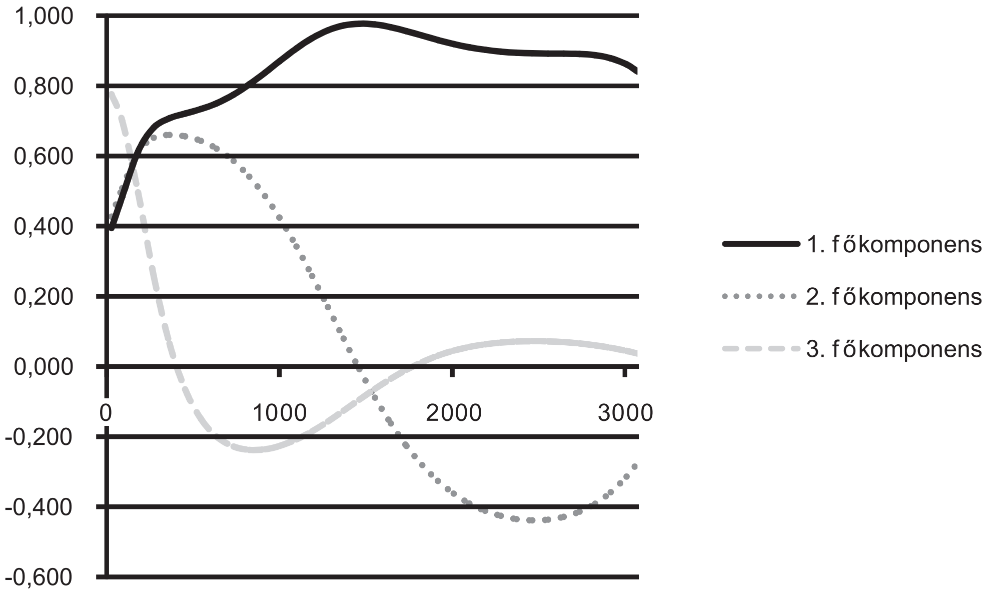
A cél a kamatlábak esetében ebben a vizsgálatban nem a további elemzésre való felhasználás volt, hanem inkább a hozamgörbe szerkezetének ilyen szempontú feltárása, azonban itt már a következő cél az lesz, hogy a felépített főkomponensmodelleket fel tudjuk majd használni a később bemutatandó VaR-számításokhoz.

A kamatlábak esetéhez hasonlóan, a rendelkezésre álló adatok struktúrájának megfelelően nyolc és fél éves (3073 nap), valamint tizenhárom éves (4746 nap) időtávokat vizsgáltam. Először azokat az elemzéseket mutatom be, ahol csak nyolc és fél éves futamidőig vettem be a lejáratokat az elemzésbe, majd pedig azokat, ahol már tizenhárom éves futamidőig.

Az első modellben negyedévenként követik egymást a lejáratok, egészen nyolc és fél évig. Egynél nagyobb sajátértékhez ekkor három főkomponens tartozik, ezek együtt a teljes variancia 96,4%-át magyarázzák. A főkomponensek egyes lejáratokhoz tartozó változókkal való korrelációi hasonlóak az előző esethez. A *3. ábra* mutatja be a változók és a főkomponensek közötti korrelációt.

3. ábra

A kifejtett főkomponensek és az eredeti változók közötti korreláció a megváltozások esetében, nyolc és fél éves lejáratig



Amint a fenti ábrán is látható, az első főkomponens itt is pozitívan korrelál minden lejárattal, a rövid lejáratokra gyengébben, majd egyre erősebben, kevéssé csökkenve a hosszabb lejáratok esetében. A főkomponens, amely itt is a szint megváltozásaként értelmezhető, a teljes variancia 72%-át magyarázza meg.

A második főkomponensnek a teljes variancia 19%-a tulajdonítható. Ennél a főkomponensnél a korreláció hasonló mértékű az elsőhöz a hozamgörbe elején, majd fokozatosan csökkenni kezd, három és fél év után már negatívvá válik. Ez a komponens tehát a hozamgörbe meredekségét változtatja, a hatása az egy év körüli, illetve a hét év körüli lejáratoknál a legerősebb.

A harmadik főkomponens a teljes variancia 5,5%-át magyarázza. Ebben az esetben a korreláció a legrövidebb lejáratra magas, majd gyorsan csökken, egy év után már negatívvá válik, azután öt éven túl ismét pozitív lesz. Itt is megkapjuk tehát a szokásos harmadik komponenst, a görbület változását.

Az ebben a szakaszban vizsgált adatsor esetében tehát lényegében megkaptuk az előzetesen várt három főkomponenst, mindegyik jelentős részt magyaráz a teljes varianciából; nem meglepő módon a legtöbbet a szint főkomponens, majd a meredekség, és a legkevesebbet a görbület magyaráz, ez 70%–20%–5% körüli arányokat jelent. A három főkomponens együtt pedig már nagyon jól leírja a vizsgált adatsort.[9]

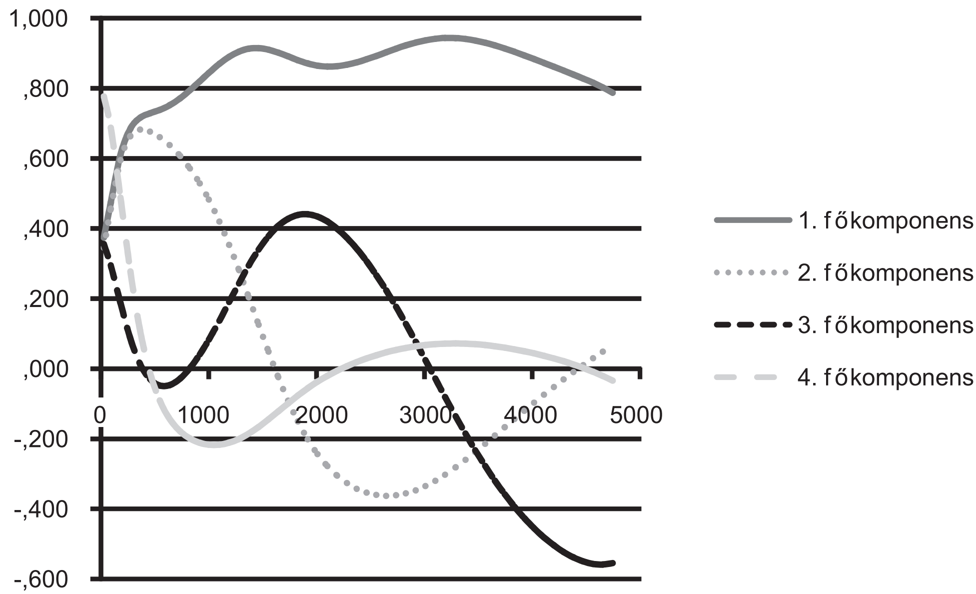
9 SHERRIS [1995] az ausztrál államkötvénypiacon hasonló alakú faktorokat talált: a magyarázott varianciahányadok esetében 81%, 15% és 3%.

5.1. A tizenhárom éves lejáratig készített modell eredményei

Ahogy a kamatlábak eseténél is, itt is vizsgáltam az adatokat hosszabb lejáratokig is, erre azonban rövidebb adatsor állt rendelkezésre. Ha tizenhárom évig tekintettem a lejáratokat, akkor az adatsor 2001. december 4-én kezdődik, és 2008. december 31-ig tart. A lejáratokat ebben az esetben is negyedévenként vettem be az elemzésbe.

4. ábra

A kifejtett főkomponensek és az eredeti változók közötti korreláció a megváltozások esetében, tizenhárom éves lejáratig



A négy darab, egynél nagyobb sajátértékhez tartozó főkomponens ebben az esetben a teljes variancia 99,3%-át magyarázza meg. Az első főkomponens hasonló nagyságot magyaráz, mint a korábbiakban, körülbelül 72,4%-ot. Mint a 4. ábrán is látható, a főkomponens minden lejárattal pozitívan korrelál, azonban gyengébben a rövid lejáratokkal, majd az egyéves futamidőtől már erős a korreláció. Még így is azt mondhatjuk, hogy ez a főkomponens a hozamgörbe szintjének megváltozását jellemzi, habár ez a szintváltozás a hozamgörbe rövid végén kevésbé erős.

A többi főkomponenst már nehezebb ilyen egyértelműen értelmezni, ugyanis a hozamgörbe egyes részein eltérően viselkednek. A második főkomponens a teljes variancia 12,4%-át magyarázza meg, hasonló mértéket, mint a harmadik, amely a variancia körülbelül 11%-át adja.

A második főkomponens körülbelül az egyéves futamidőig hasonlóan viselkedik, mint az első főkomponens; onnantól azonban nem tovább nő a korreláció az egyes lejáratokkal, hanem gyorsan csökkenni kezd, négy és fél évnél válik negatívvá. Ezután egyre erősödik a negatív korreláció, egészen a nyolcéves lejáratig, majd a következő négyéves szakaszon egyre nő, végül ismét pozitívvá válik, bár igen alacsony értéken. Ennek alapján ez a főkomponens még mindig beazonosítható mint a hozamgörbe meredekségének változása, azonban a hatás rövid végen, valamint a tíz éven túli lejáratokon nem ilyen egyértelmű.

A harmadik főkomponens a korrelációkat vizsgálva, bizonyos szempontból hasonlít a másodikra: kicsit tükrözve, eltolva és elfordítva, de legalábbis egymáshoz viszonylag közeli lejáratoknál változik meg a változásuk előjele. A legrövidebb, huszonnyolc napos futamidővel körülbelül ugyanakkora a korrelációjuk: a második főkomponensnek 0,324, míg az elsőnek 0,396. Ezután azonban a harmadik főkomponens a lejáratok növekedésével a hozzájuk tartozó hozamváltozásokkal egyre kevésbé korrelál: két évnél már nulla körülivé válik a korrelációs együttható, majd ismét nőni kezd, négy év és hat és fél év között 0,4 körüli. Ezután már végig csökkeni fog a korreláció, nyolc és fél év után már negatív, a tizenhárom éves futamidővel pedig már –0,54 a korreláció.

Ez a főkomponens valahol a meredekség és görbület megváltoztatása között van; ha a két év körüli lejáratokra nem esne le a korreláció mértéke, akkor egyértelműen a meredekséget változtatná, ha pedig az elején nem lenne a közepes pozitív korreláció, akkor meg egyértelműen a görbület megváltozásáról beszélhetnénk.

A negyedik főkomponens a variancia 3,6%-át magyarázza; ez jóval kevesebb, mint a többinél, de azért érdemes vele foglalkozni. Ez a főkomponens inkább görbületet módosítónak tekinthető: a rövid lejáratoknál erős, 0,7 körüli pozitív korreláció hamar lecsökken, tizenöt hónapnál (455 nap) már negatív, és ez a gyenge negatív korreláció meg is marad egészen a hatéves futamidőig. Ezután gyenge, nullához közeli pozitív korreláció figyelhető meg.

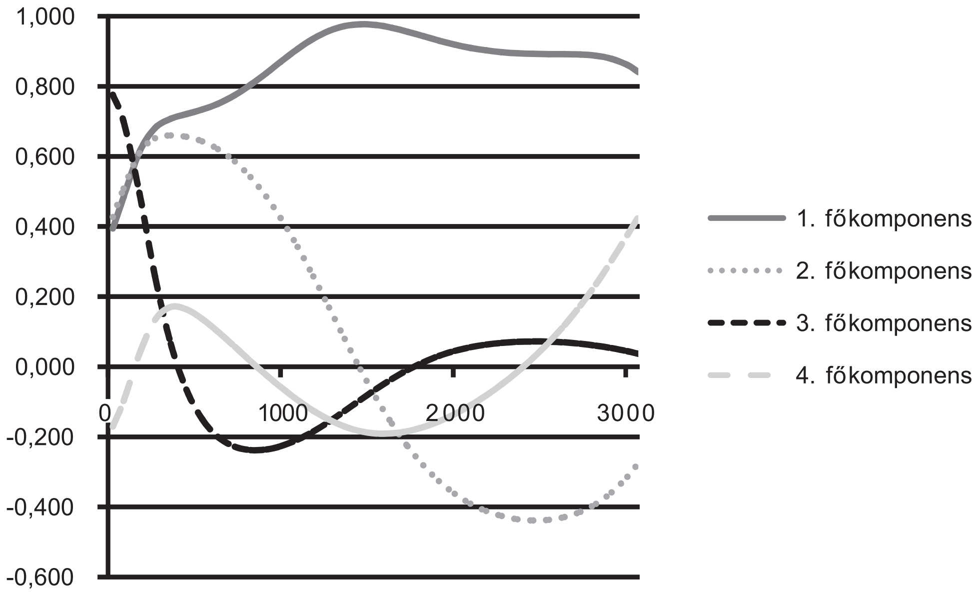
Négy főkomponens esetén igen nagy mértékben lehet reprodukálni egyenként is az eredeti változók varianciáját, a kommunalitásmutatók értéke bőven 0,9 feletti minden változó esetében.

5.2. A negyedik főkomponens a rövidebb lejáratok esetében

Érdemes lehet még megjegyezni, hogy a nyolc és fél éves lejáratig felállított modelleknél is viszonylag nagy, három százalék körüli részét magyarázza meg a teljes varianciának a negyedik főkomponens, amelyhez azonban már egynél kisebb sajátérték tartozik. Nem sokkal kisebb ez az arány annál, amit a harmadik, még egynél nagyobb sajátértékhez tartozó főkomponens magyaráz; ez, mint korábban szerepelt, 5% körüli értéket jelent.

5. ábra

Négy főkomponens és az eredeti változók közötti korreláció a megváltozások esetében, nyolc és fél éves lejáratig



Az 5. ábra mutatja a nyolc és fél évig tartó lejáratokat negyedévente tartalmazó modellből kapott főkomponensek korrelációit az egyes lejáratok szerinti változókkal az első négy főkomponensre. Látható, hogy az ábra nagyon hasonlít a tizenhárom éves lejáratig felállított modell esetére az első és a második főkomponens tekintetében. A harmadik főkomponens itt erősebben korrelál a rövid lejáratokkal, majd – hasonlóan a másik esethez – 500 nap környékén leesik nullára a korreláció. Itt azonban tovább csökken, majd ismét nulla körüli lesz, nem erősödik meg újra, mint a hosszabb lejáratokat tartalmazó modellnél. A negyedik főkomponens is eltérően viselkedik: itt kezdetben alacsony a korreláció, ezután gyenge pozitív, illetve negatív lesz, majd a lejáratok végére erősödik fel, míg az előző esetben a rövid végen erős a korreláció, majd nulla körül ingadozik.

A fenti elemzés eredményeit összefoglalva, azt mondhatjuk, hogy az adatokat nagyon jól magyarázza viszonylag kevés számú látens változó: szám szerint három vagy négy változó a teljes variancia akár több mint 99%-át is visszaadhatja. Két változó azonban legfeljebb a variancia 90%-át tudja visszaadni. Az első főkomponens által magyarázott varianciahányad körülbelül hasonló maradt; leginkább a második főkomponens által magyarázott variancia mértéke csökkent le, míg a harmadik és negyedik főkomponens által magyarázott variancia nőtt.

A kamatlábak esetével szemben azonban itt már nem olyan egyszerű és egyértelmű az egyes főkomponensek beazonosítása. A korreláció az egyes változókkal a lejáratokon végighaladva többször válthat előjelet, illetve hosszabb szakaszokon lehet nulla körüli, ami megnehezíti, hogy egy az egyben megfeleltessük az egyes főkomponenseket a hozamgörbe meredekségét vagy görbületét megváltoztató hatásnak.

Ezalól egyedüli kivétel az első, a variancia döntő részét, legalább hetven százalékát magyarázó főkomponens, amely gyakorlatilag a hozamgörbe szintjét változtató faktornak tekinthető. A további két vagy három főkomponens valamennyire változtatja a meredekséget és a görbületet is.

6. Value at Risk-számítás

Miután az előző részben beazonosítottam azt a három-négy főkomponenst, amelyeknek a segítségével nagyrészt leírható a jóval több változóból álló eredeti hozamgörbe-megváltozásokat leíró adatsor, ezen főkomponensek segítségével lehetőség nyílik arra, hogy számításokat végezzek azon eszközök VaR-értékeinek becslésére, amelyeknek az ára ezen kamatlábak értékétől függ.

A következő részben ezeket a számításokat két modellre fogom végrehajtani. Az egyik a kamatlábak megváltozásait nyolc és fél évig, negyedévente tartalmazó adatokra épített főkomponensmodellből indul ki, a másik a kamatlábakat szintén negyedévente, de tizenhárom évig tartalmazó modellből épül fel.

A második modellből természetesen több eszköz vizsgálata válik lehetővé, egyszerűen azért, mert hosszabb futamidejű eszközök is bekerülhetnek az elemzésbe.

A VaR-értéket természetesen az alábbi, szokásos[10] képlet definiálja, ahol L a veszteség, α pedig a választott valószínűségi szint (például 95%):

$$VaR_{\propto} = inf\{l \in \Re : P(L > l) \leq 1 - \propto\}. \tag{3}$$

6.1. A vizsgált portfóliók összeállítása[11]

A dolgozat készítéséhez felhasznált adatok, mint az az adatok ismertetésekor is szerepel, a forintban denominált magyar államkötvények másodpiacáról származnak, így kézenfekvő a kapott eredményeket is ezen a piacon, ezen termékek körében felhasználni. Természetesen bármilyen másik olyan eszköz kamatlábkockázatának[12] a modellezésére is használhatók az eredmények, amelyeknek a pillanatnyi értéke a magyar zérókupon-hozamgörbétől függ, azonban ez a legnyilvánvalóbb alkalmazási lehetőség. Tehát a terméknek nyilvánosan kibocsátott, a másodpiacon forgalmazott, fix kamatozású államkötvénynek kell lennie.

A főkomponensek becslésénél felhasznált adatsor 2008. december 31-ig tart, így a modell tesztelésekor olyan kötvényeket érdemes választani a magyar piacról, amelyek a rendelkezésre álló adatsor becslésnél fel nem használt részében, azaz a 2009. január 1-jétől 2011. május 19-ig tartó időszakban elég hosszú ideig forgalomban voltak, és a lejáratig

10 Az alapvető Value at Risk-módszertannal foglalkozik Jorion [1999].

11 A jelenleg forgalomban lévő, illetve a múltban létező magyar államkötvények alapadatai megtalálhatók az Államadósság Kezelő Központ Zrt. weboldalán a http://www.akk.hu/eptcft.ivy címen.

12 A kamatlábkockázat kezelésének alapelveivel természetesen a Bázel II. szabályozás is foglalkozik, abban a keretben is használható a PCA-módszer.

hátralévő idejük nem volt túl rövid ahhoz, hogy értelmes legyen esetükben a számítások elvégzése.

Figyelembe kell még vennünk azt is, hogy az egyes kötvények lejárata ne haladja meg azt az időtávot, amilyen hosszan rendelkezésre álltak a főkomponensek becsléséhez a hozamgörbeadatok, különben nem lesz lehetőség az újraárazások végrehajtására.

Mivel a vizsgált kezdő dátum 2009. január 1-je (pontosabban az első adat 2009. január 5-éről van), így a nyolc és fél éves modell esetében ez azt jelenti, hogy a kötvények lejárata legfeljebb 2017 év közepe lehet. Ilyen kötvény tizenkét darab van, azonban ebből a tizenkettőből kettőnek gyakorlatilag megegyeznek a kifizetései, így tizenegy kötvénnyel számolhatunk.

A tizenhárom éves modell esetében a legtávolabbi lejárat 2021 vége lehet, ez további három kötvény bevonását teszi lehetővé.

A következőkben elvégzett vizsgálatokhoz tehát ebből a tizennégy kötvényből fogom összeállítani azt a portfóliót, amire a VaR-számítást végzem. A leghamarabb lejáró kötvény ezek közül 2011. február 12-én járt le, míg a leghosszabb futamidejű 2020. november 12-én fog lejárni. Elkészítve az ehhez a tizennégy kötvényhez tartozó cash flow-táblákat, azt láthatjuk, hogy összesen hatvankilenc darab kifizetési időponttal rendelkeznek, amelyekből ötvennyolc darab 2010-es vagy későbbi, és negyvenöt darab 2011. március 31. utáni.

A nyolc és fél éves modell tekintetében a 2017 év közepe előtt lejáró kötvényekhez tartozó kifizetési időpontokat kell figyelembe venni. Ezek száma harminchét.

A vizsgált portfólió kiválasztásakor tehát ebből a tizennégy, illetve tizenegy kötvényből fogok választani.

6.2. Historikus VaR

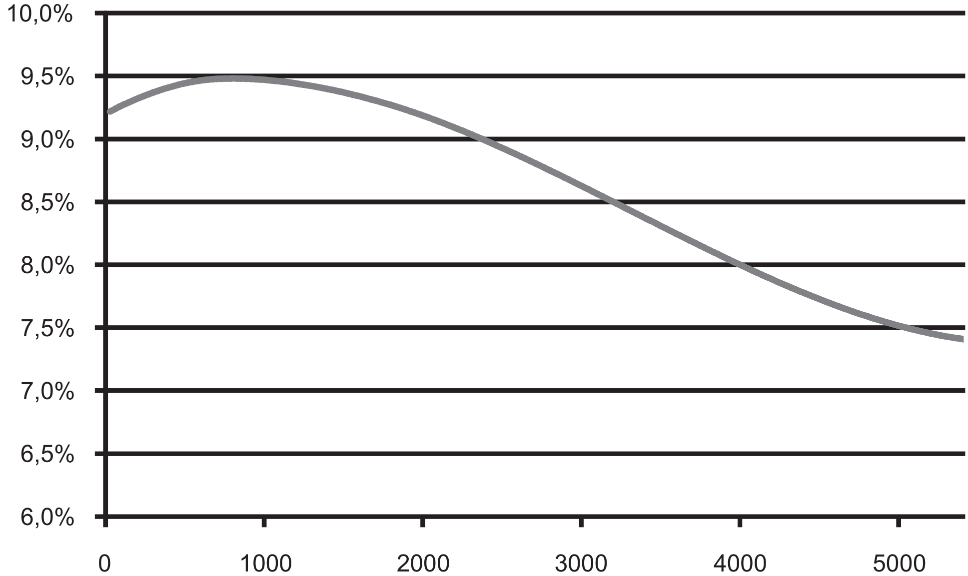
A főkomponens-elemzés kiszámítása során természetesen nemcsak a korábbi részekben használt korrelációs együtthatók kaphatók meg az egyes főkomponensek és az eredeti változók között, hanem az is, hogyan állnak elő az egyes főkomponensek az eredeti változók lineáris kombinációjaként, így a felhasznált adatsor megfigyeléseihez megkapjuk a vonatkozó főkomponensértékeket is.

Ez természetesen fordítva is igaz: kiszámíthatók azok az együtthatók is, amelyek segítségével az eredeti adatsort kaphatjuk vissza a főkomponensek értékének ismeretében.

A legegyszerűbb VaR-számítási módszer a historikus adatok empirikus eloszlásának felhasználásával készített Monte-Carlo-szimuláció. Ez ebben az esetben a következő módon történik:

6. ábra

A zérókupon-hozamgörbe 2009. január 5-én



Forrás: ÁKK

Megnézzük a kiindulási napon a hozamgörbe értékeit. Ennek alapján be tudjuk árazni a portfólió kezdeti értékét. (A 6. ábra mutatja a zérókupon-hozamgörbe alakját 2009. január 5-én, a lejáratok napban megadva.) Minden egyes napra, amilyen időtávra számítjuk a VaR-értéket (tehát tíznapos VaR esetén összesen tíz alkalommal) véletlenszerűen választunk egy-egy múltbeli realizációt a vizsgálatba bevont – a modelltől függően itt most három vagy négy – főkomponens értékeiből. Ebből visszaszámoljuk a hozamgörbe megváltozásának értékeit, ebből pedig a hozamgörbét, majd ennek alapján újból beárazzuk a portfóliót, és kiszámítjuk a veszteséget, illetve nyereséget.

A fenti szimulációt megfelelően sokszor megismételjük (ebben az elemzésben mindig 10 000 realizációt vizsgálok), majd a kapott adatsorból kiválasztjuk a vizsgált VaR-szintnek (például 95%-os, 99%-os) megfelelő percentilist, és ez az érték lesz a keresett VaR-mutató.

Az eljárás előnye, hogy nem kell semmilyen feltételezéssel élni a kockázati tényezők eloszlását illetően, ugyanis nem történik eloszlásillesztés; legnagyobb hátránya viszont az, hogy csak olyan eseményeket veszünk figyelembe, amelyek a múltban már megtörténtek, így nem készülhetünk fel olyan szélsőséges változásokra, amelyek kis bekövetkezési valószínűségük miatt korábban még nem következtek be, azonban nem lehetetlen a bekövetkezésük, és a jövőben még bekövetkezhetnek.

6.2.1. Nyolc és fél éves modell

A historikus VaR-számítást először a nyolc és fél éves, a lejáratokat negyedévenként tartalmazó modell alapján végeztem el, három főkomponens figyelembe vételével.

A vizsgált portfólióba elsőre beválogattam az összes szóba jöhető kötvényt, így a vizsgált portfólió tizenkét darab kötvényből állt.[13] A portfólió kiinduláskori értékét[14], átlagidejét és konvexitását tartalmazza az *1. táblázat* 2009. 01. 05-én, a számítások kezdetekor.

1. táblázat

Az első vizsgált portfólió néhány jellemzője

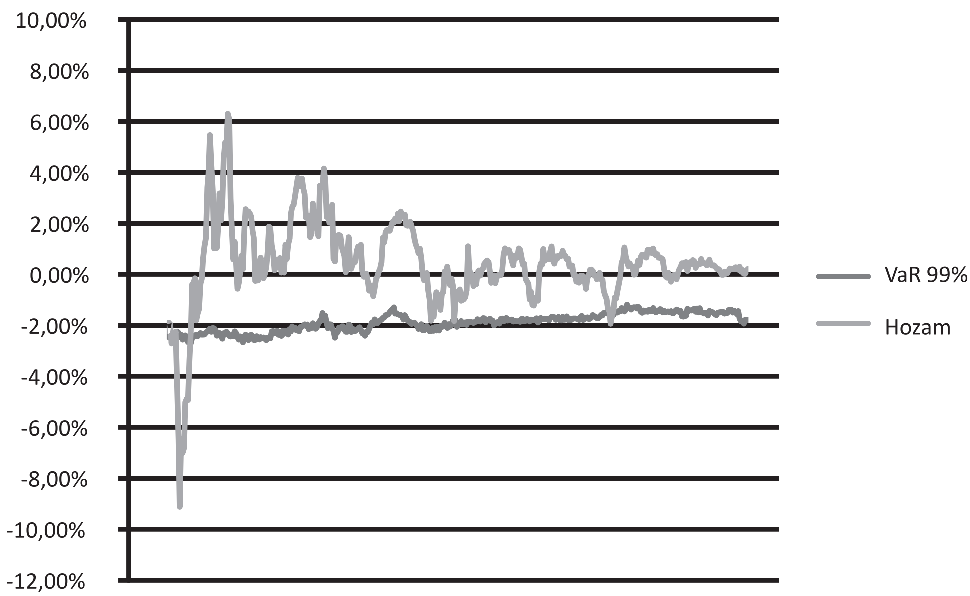
(2009. 01. 05)

Jelenérték (Ft)	115 180
Átlagidő (év)	3,49
Konvexitás	15,98

Először tíznapos VaR-t számoltam, amelyet összehasonlítottam a portfólió tényleges értékváltozásával, ezt ábrázolja az alábbi grafikon *(7. ábra)*, a változékonyabb adatsor a tényleges tíznapos százalékos hozam, a kevésbé volatilis pedig a tíznapos 99%-os VaR-érték százalékban.

7. ábra

99%-os VaR és tényleges veszteség az első vizsgált portfóliónál



13 A választott kötvények szerepelnek a *3. táblázatban*, az ott szereplő kötvények közül ebben az első portfólióban egyet-egyet választottam.

14 A vizsgált portfóliók kiindulási értékének, illetve időszak végi értékének számításakor mindig a hozamgörbe-adatsor alapján számoltam, nem pedig az ÁKK által szintén közölt, adott napi kötvényárfolyamokat használtam.

Az ábra elején láthatók a 2009-es év elején tapasztalható, nagy hozamingadozások; talán ennek tudható be, hogy a módszer alulbecsüli a kockázatot. A VaR-értéken belül maradó veszteség arány jóval alatta van a 99%-nak, csupán 96,5%-os.

Ugyanez igaz a 95%-os VaR-becslésre is. Itt is alulbecsli a modell a kockázatot: a tíznapos veszteség csak a megfigyelések 89,8%-ban marad alatta a megfelelő VaR-értéknek.

Ez az eredmény talán a historikus módszer már említett hátrányának köszönhető, vagyis annak, hogy a múltban még elő nem fordult szcenáriók nem modellezhetők vele. Okozhatta azonban a 2009-es év bizonytalan piaca is; ha a minta első negyedét nem nézem, akkor a 95%-os VaR-mutatót már kisebb gyakorisággal, az esetek 6,92%-ban haladja meg a tényleges veszteség. A 99%-os VaR-on belül ekkor 99,4%-ban van a veszteség. Az előbbi mutató tehát itt is alulbecsül, a második viszont már megfelelő eredményt ad.

Elvégeztem a szimulációt egy nagyobb átlagidejű portfólió választásával is. A portfólió jellemzőit a *2. táblázat* tartalmazza.

2. táblázat

A második vizsgált portfólió néhány jellemzője (2009. 01. 05.)

Jelenérték (Ft)	320 659
Átlagidő (év)	4,65
Konvexitás	27,58

A portfólióba egészen pontosan a *3. táblázatban* szereplő kötvények kerültek bele a jelzett darabszámmal. Az előző portfólió ugyanezeket a kötvényeket tartalmazta, azonban mindegyikből egy-egy darabot.

3. táblázat

A második vizsgált portfóliót alkotó kötvények

db	kötvény	db	kötvény	db	kötvény
1	A110212A00	1	A120424D08	5	A140212C03
1	A110422C08	1	A120612B06	6	A150212A04
1	DK2011/01	1	A121024C07	7	A160212C05
1	A111012B06	1	A130212D02	8	A170224B06

Mint látható, a fenti portfólió átlagideje több mint egy egésszel nagyobb, mint az előzőé, a konvexitása pedig majdnem a kétszerese.

A historikus VaR-becslés hatékonysága azonban nem igazán változott meg a nagyobb átlagidejű portfólió esetében sem. Ebben az esetben is a 99%-os VaR-érték az esetek 96,7%-ában volt nagyobb a tényleges veszteségnél, a 95%-os VaR-érték pedig csupán az esetek 89,39%-ában. Az időszak elejét nem vizsgálva, itt is igaz, hogy a 99%-os VaR-érték már megfelelő, 0,94% a meghaladások aránya, a 95%-os azonban továbbra is alulbecsli a kockázatot, 7,55% a meghaladások aránya.

6.2.2. Tizenhárom éves modell

A következő részben leírom a historikus VaR-becslés eredményeit a tizenhárom éves lejáratokig számolt modell esetében. Az elemzés eredményeinek megfelelően, négy főkomponenst szimuláltam. Itt már további kötvényeket is választottam a portfólióhoz: a nyolc és fél éves modell első esetéhez hasonlóan minden szóba jöhető kötvényből egy darab került először a portfólióba. A kiválasztott kötvények az *5. táblázatban* szerepelnek.

A portfólió jelenértéke 2009. január 5-én, valamint átlagideje és konvexitása megtalálható a *4. táblázatban*.

4. táblázat

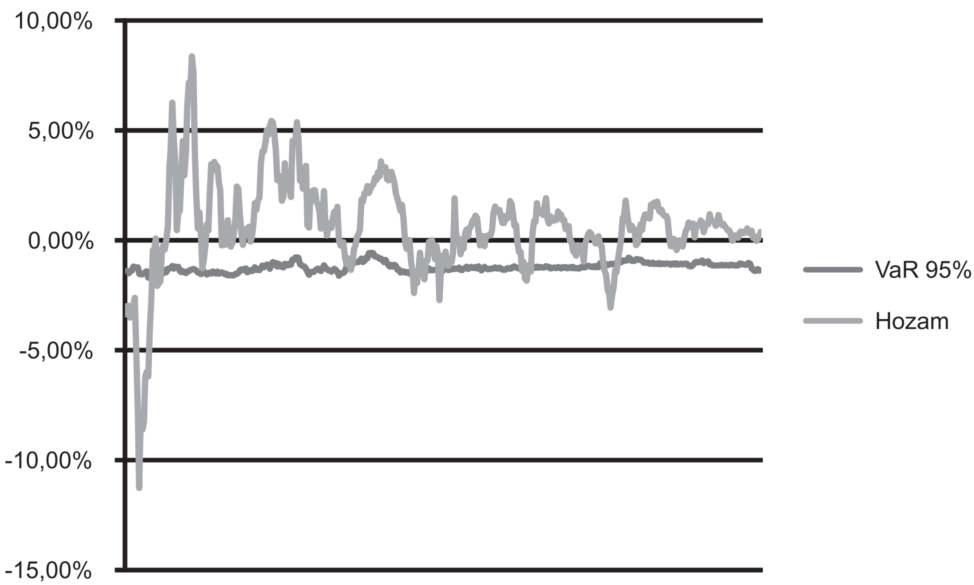
A harmadik vizsgált portfólió néhány jellemzője (2009. 01. 05.)

Jelenérték (Ft)	142 816
Átlagidő (év)	4,27
Konvexitás	26,37

Hasonlóan az előző esethez, itt is számoltam 95%-os, valamint 99%-os VaR-t is. Az alábbi grafikon *(8. ábra)* mutatja a 95%-os VaR százalékos értékét, valamint a tíznapos tényleges veszteségeket.

8. ábra

95%-os VaR és tényleges hozam a harmadik portfóliónál



A modell itt is hasonlóan teljesít, mint az előző esetben. A 99%-os VaR esetén a túllépések aránya 4,72%, míg a 95%-os VaR esetén 9,91%. Hasonlóan javulnak az értékek, ha az időszak elejétől eltekintünk, azonban itt még a 99%-os VaR is alulbecsült lesz 1,57%-os túllépési aránnyal, míg a 95%-so VaR esetében 6,6%-ra javul az arány.

Elvégeztem az elemzést egy másik, nagyobb átlagidejű portfólióra is. A portfólió az *5. táblázatban* szereplő kötvényekből állt, a jelölt mennyiségekben.

5. táblázat

A negyedik vizsgált portfóliót alkotó kötvények

db	kötvény	db	kötvény	db	kötvény
1	A110212A00	1	A120612B06	2	A160212C05
1	A110422C08	1	A121024C07	6	A170224B06
1	DK2011/01	1	A130212D02	7	A171124A01
1	A111012B06	1	A140212C03	7	A190624A08
1	A120424D08	1	A150212A04	7	A201112A04

A negyedik portfólió jelenértékét, átlagidejét és konvexitását mutatja be a *6. táblázat*.

6. táblázat

A negyedik vizsgált portfólió néhány jellemzője (2009. 01. 05.)

Jelenérték (Ft)	364 533
Átlagidő (év)	6,01
Konvexitás	48,70

Ebben az esetben is teljesen hasonló a modell teljesítménye a korábbiakéhoz. A 99%-os VaR esetén az esetek 95,28%-ban van a VaR-értéken belül a tényleges veszteség, míg a 95%-os VaR esetén ez az arány csupán 88,92%-os.

A túllépések arányának csökkenése az idősor elejének kihagyása esetén hasonló az előző esetben látotthoz.

6.2.3. Tizenhárom éves modell három faktor felhasználásával

A negyedik faktor fontosságának vizsgálata céljából a fenti tizenhárom éves modellben végzett vizsgálatokat elvégeztem három főkomponens szimulálásával is. Az eredmények nem mutattak sem egyértelmű javulást, sem egyértelmű romlást; egyes esetekben kissé romlottak vagy kissé javultak, de a különbség mindig fél százalékponton belül volt. Ez mindenesetre megkérdőjelezi a negyedik faktor fontosságát a VaR-becsléshez.

6.3. VaR-számítás normális eloszlású faktorok feltételezésével

A historikus Monte-Carlo-szimuláció után a következő felhasznált módszer a normális eloszlás feltételezésével végzett VaR-számítás. Ebben az esetben azt tételezzük fel, hogy a kockázati faktorok együttes eloszlása többdimenziós normális eloszlás, és a szimulációhoz ennek a becsült paramétereit használjuk fel.

Jelen esetben a kockázati faktorokat a főkomponensek jelentik. Mivel a főkomponensek definíció szerint korrelálatlanok, sztenderdizáltak, így csupán sztenderd normális eloszlású, véletlen változókat kell szimulálni, ezekből pedig – ahogy a főkomponens-elemzés matematikai alapjait tartalmazó rész leírja, illetve ahogyan a historikus VaR esetében is – visszaszámíthatóak az eredeti adatsornak ezen faktorok által magyarázott értékei. Tehát megkaphatjuk a szimulált hozamgörbe-megváltozásokat, ebből pedig a megváltozott hozamgörbét, amelynek a segítségével újraárazhatjuk a portfóliónkat, megkapva a VaR-értékeket.

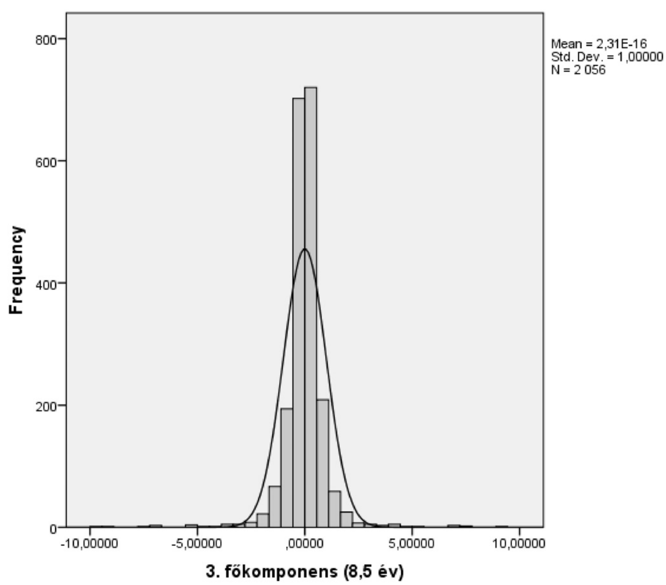
A módszer előnye, hogy numerikusan könnyen számolható, viszont hátránya az, hogy jól ismert módon a kockázati faktorok normalitásának feltételezése általában nem helytálló. A pénzügyi adatsorokra ugyanis jellemző a vastag szélű eloszlások jelenléte, ami azt eredményezi, hogy a szélsőséges értékek előfordulási valószínűsége sokkal nagyobb, mint ha normális eloszlást követnének az események.

Különösen nagy problémát jelent ez, ha éppen a lehetséges veszteségek eloszlását vizsgáljuk. A normalitás feltételezésével kapcsolatos problémák itt is megjelennek: mint a cikk elején, az adatsorok bemutatatásánál is jeleztem, a normalitástesztek mind a kamatlábak esetében, mind a kamatlábak megváltozásainak esetében elvetik a normalitás nullhipotézisét.

Itt azonban már nem az eredeti változókkal dolgozunk, hanem a változók lineáris kombinációjaként előállított főkomponensekkel.

9. ábra

A harmadik főkomponens hisztogramja a nyolc és fél éves modellben



A 9. ábrán látható a harmadik főkomponens hisztogramja a nyolc és fél éves modellből. Az ábrára továbbá rá van illesztve a normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Amint látható, a főkomponens eloszlása csúcsosabb a normális eloszlásnál, és a szélei vastagabbak, azonban viszonylag szimmetrikusnak tűnik az eloszlás. Hasonló a helyzet a másik három főkomponens esetében is.

A *7. táblázat* tartalmazza a nyolc és fél éves modell három főkomponensének csúcsosság- és ferdeségmutatóit. Ahogy látható, a minta jóval csúcsosabb a normális eloszlásnál, azonban viszonylag szimmetrikus; viszont a terjedelme nagyon nagy, a szórásnak körülbelül hússzorosa.

7. táblázat

A nyolc és fél éves modell főkomponenseinek egyes statisztikái

	Terjedelem	Ferdeség	Kurtózis
1. főkomponens (8,5 év)	20,26744	,964	26,539
2. főkomponens (8,5 év)	23,64600	–,140	52,239
3. főkomponens (8,5 év)	18,66887	–,348	24,575

Hasonló a helyzet a tizenhárom éves modell esetében is. Amint a *8. táblázatban* látható, a minta ferdesége nullához viszonylag közeli, míg a csúcsossága igen nagy; ugyanez mondható el a terjedelemről is. A hozzájuk tartozó sajátérték nagysága szerint sorba állított főkomponensek a két modellben nagyjából hasonló mutatókkal rendelkeznek.

8. táblázat

A tizenhárom éves modell főkomponenseinek egyes statisztikái

	Terjedelem	Ferdeség	Csúcsosság
1. főkomponens (13 év)	19,37456	1,013	23,977
2. főkomponens (13 év)	23,59751	,428	57,727
3. főkomponens (13 év)	16,36033	,774	18,891
4. főkomponens (13 év)	19,34195	–,757	25,844

A fenti problémák mutatják, hogy a normális eloszlás feltételezése igen kétséges ebben az esetben, a kapott eredményeket érdemes fenntartásokkal kezelni.[15] Ennek ellenére, minthogy sztenderd módszerről van szó, illetve a különböző módszerek összehasonlíthatósága miatt, elvégeztem a VaR-számítást normális eloszlás feltételezése mellett is.

15 Többféle módszer lehet alkalmas ennek a problémának a kezelésére: különböző normálistól eltérő eloszlások vagy nem paraméteres eljárások használata, ahogy például Fiori–Ianotti [2006] javasolja olasz állampapírpiaci hozamok vizsgálata kapcsán.

6.3.1 Normális eloszláson alapuló VaR-szimuláció a nyolc és fél éves modell esetében

Először itt is a nyolc és fél éves modellre végeztem a szimulációt. A vizsgált portfólió először ugyanaz volt, mint a historikus módszer esetében vizsgált első portfólió.

A módszer ugyanúgy alulbecsli a kockázatot, mint a korábban bemutatott historikus becslés. Nagyjából a VaR túllépésének az arányai is hasonlóak: a 95%-os VaR esetében 9,91%, a 99%-os VaR esetében pedig 5,9%. Az arányok szintén javulnak, ha a minta első negyedét nem nézem; hasonlóan a korábbiakhoz, a 99%-os VaR esetén 2,2%-ra csökken a túllépések aránya, a 95%-osnál pedig 6,6%-ra.

Megvizsgáltam itt is a nagyobb átlagidejű (második számú) portfólió esetét. Az eredmények lényegében ugyanolyanok, mint a 95%-os VaR esetén, a 99%-os VaR esetében viszont rosszabbak. Tehát a kis valószínűséggel bekövetkező veszteségeket a historikus szimuláció jobban visszaadja ez esetben.

6.3.2. Normális eloszláson alapuló VaR-szimuláció a tizenhárom éves modell esetében

Hasonlóan az előzőekhez, ennél a modellnél is számoltam VaR-mutatót, normális eloszlást feltételezve. Az első vizsgált portfólió ismét a szokásos volt (harmadik portfólió), azaz a minden kötvényből (a hosszabb lejáratúakból is) egy darabot tartalmazó összeállítás.

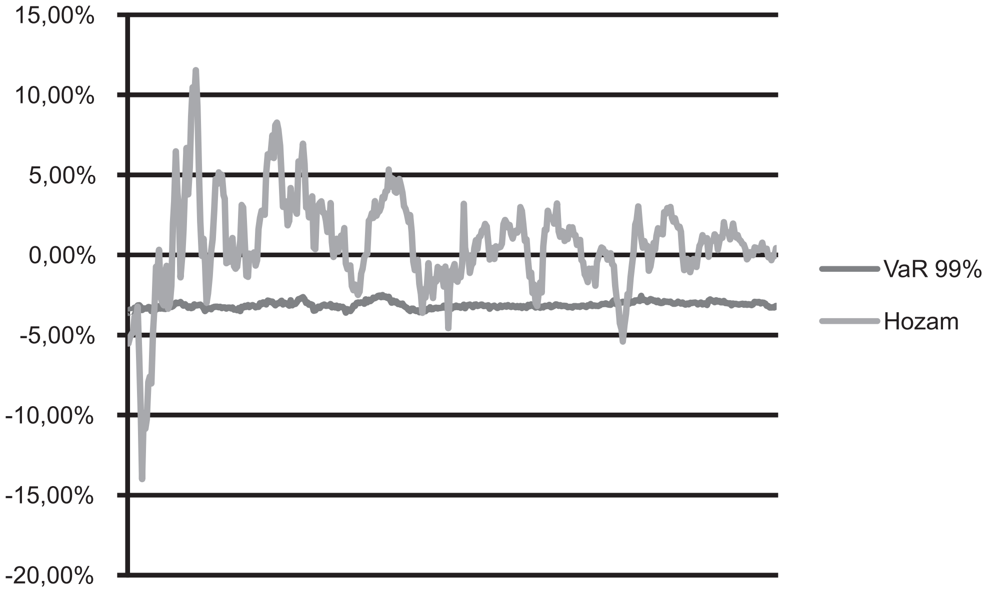
Itt is az figyelhető meg, ami a rövidebb lejáratokig épített modellben, hogy a 95%-os VaR eredmények nagyjából hasonlóak (itt kicsit rosszabbak), míg a 99%-os eredmények már jelentősebb mértékben romlanak.

Megvizsgáltam a negyedik, nagyobb átlagidejű portfólió eredményeit is: ott a 95%-os VaR szinte ugyanúgy teljesít, mint a historikus becslés, a 99%-os VaR-eredmények viszont rosszabbak. Igaz ez akkor is, ha a teljes adatsort vizsgálom, illetve ha az elejét elhagyom. Az alábbi grafikon *(10. ábra)* mutatja a 99%-os tíznapos VaR alakulását a második portfólió esetében. Ez is nagyon hasonló ábra az eddigiekhez.

Itt is vizsgáltam a különbséget a háromfaktoros és a négyfaktoros modell között. Az eredmény hasonló volt, mint a historikus VaR esetében; hol az egyik, hol a másik modell teljesített kicsivel jobban, tehát itt sem indokolt feltétlenül ennek alapján a negyedik főkomponens bevonása.

10. ábra

99%-os VaR és tényleges hozam a harmadik portfóliónál, normális eloszlású faktorok esetén



A VaR-becslések eredményének összefoglalását tartalmazza a következő két táblázat. A *9. táblázat* a VaR-meghaladások arányát mutatja a teljes tesztmintán.

9. táblázat

A VaR-meghaladások arányai a teljes tesztmintán

	3 főkomponens				**4 főkomponens**	
	1. portfólió	**2. portfólió**	**3. portfólió**	**4. portfólió**	**3. portfólió**	**4. portfólió**
Historikus 95%-os VaR	10,14%	10,61%	10,14%	11,32%	9,91%	11,08%
Historikus 99%-os VaR	3,54%	3,30%	4,48%	4,48%	4,72%	4,72%
Normális 95%-os VaR	9,91%	10,14%	10,14%	11,32%	10,14%	11,08%
Normális 99%-os VaR	5,90%	5,66%	5,90%	6,13%	5,90%	5,90%

A *10. táblázat* tartalmazza a VaR-meghaladások arányát az egyes vizsgált portfóliók és modellek esetében a tesztadatsor utolsó háromnegyed részére (2010. május 10-től).

10. táblázat

A VaR-meghaladások arányai a tesztminta utolsó háromnegyed részén

	3 főkomponens				4 főkomponens	
	1. portfólió	2. portfólió	3. portfólió	4. portfólió	3. portfólió	4. portfólió
Historikus 95%-os VaR	6,92%	7,55%	6,92%	7,23%	6,60%	6,92%
Historikus 99%-os VaR	0,63%	0,94%	1,57%	1,57%	1,57%	1,89%
Normális 95%-os VaR	6,60%	6,92%	6,92%	7,23%	6,92%	6,92%
Normális 99%-os VaR	2,20%	2,20%	2,20%	2,52%	2,20%	2,20%

7. Összefoglalás

A cikk első részében főkomponens-elemzés segítségével vizsgáltam a másodlagos magyar államkötvénypiac hozamgörbéjét, és megállapítottam, hogy beazonosíthatók a közismert faktorok, amelyek a hozamgörbe szintjét, meredekségét és görbületét határozzák meg. A variancia döntő részét (kb. 92%-át) az első főkomponens magyarázza, az első kettő már több mint 98%-ot magyaráz meg, míg a többi főkomponens elenyésző mértékben járul hozzá a varianciához. A harmadik főkomponens azonban úgy viselkedik, mint a hozamgörbe görbületét befolyásoló tényező.

A hozamok differenciáit vizsgálva, már nem ilyen egyértelmű a helyzet: az első két főkomponens azonosítása viszonylag egyértelmű, a harmadik, illetve a negyedik intuitíve nehezebben értelmezhető; azt azonban elmondhatjuk, hogy a variancia nagy része három vagy négy főkomponenssel már visszaadható.

A differenciák főkomponensei segítségével végzett, historikus és normális VaR-becslés alapján azonban arra juthatunk, hogy a kockázatot alulbecslik a modellek; ilyen felépítésben nem alkalmasak megbízható VaR-számítás végrehajtására. Ezt okozhatja például a főkomponensek eloszlásának nyilvánvalóan nem normális jellege, de szóba jöhet az egyes portfóliók esetleges magas érzékenysége a modellbe be nem vont főkomponensekre is.

Irodalomjegyzék

Barber, Joel R.–Copper, Mark L. [2010]: Principal component analysis of yield curve movements. *Journal of Economics and Finance*, Springer Online, 2010. augusztus 11.

Basel Committee on Banking Supervision [2004]: Principles for the Management and Supervision of Interest Rate Risk. Bank for International Settlements, Bázel.

Falkenstein, Eric–Hanweck, Jerry Jr. [1997]: Minimizing Basis Risk from Non-Parallel Shifts in the Yield Curve. Part II: Principal Components. *The Journal of Fixed Income* 7. (1), 1997. 5., 85–90. o.

Fiori, Roberta–Ianotti, Simonetta [2006]: Scenario based principal component Value at Risk: An application to Italian banks' interest rate risk exposure. *Working Paper* No. 602, 2006. 09., Banca d'Italia.

Füstös László–Kovács Erzsébet–Meszéna György–Simonné Mosolygó Nóra [2004]: Alakfelismerés: sokváltozós statisztikai modellezés a társadalomtudományokban. Új Mandátum Könyvkiadó, Budapest

Hull, John C. [2006]: Options, futures and other derivatives. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey

Jorion, Philippe [1999]: A kockáztatott érték. Panem, Budapest

Knez, Peter J.–Litterman, Robert–Scheinkman, José [1994]: Explorations Into Factors Explaining Money Market Returns. *The Journal of Finance* 49. (5), 1994. 12., 1861–1882. o.

Kopányi Szabolcs [2009]: A hozamgörbe dinamikus becslése. Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest

Kreinin, Alexander–Merkoulovitch, Leonid–Rosen, Dan–Zerbs, Michael [1998]: Principal Component Analyis in Quasi Monte Carlo Simulation, *Algo Research Quarterly* 1. (2), 1998. 12., 21–30. o.

Litterman, Robert–Scheinkman, José [1991]: Common Factors Affecting Bond Returns. *The Journal of Fixed Income* 1. (1), 1991. 6., 54–61. o.

Loretan, Mico [1997]: Generating market risk scenarios using principal components analysis: methodological and practical considerations. Federal Reserve Board, New York

Malava, Antti [2006]: Principal Component Analysis of Term Structure of Interest Rates (http://www.sal.tkk.fi/publications/pdf-files/emal06.pdf)

Sherris, Michael [1995]: Interest Rate Risk Factors in the Australian Bond Markets, *Actuarial Studies and Demography Resarch Papers* 004/95, 1995. 09., Macquarie University, Sydney, Ausztrália

Tracey, Mark [2009]: Principal Componenst Value at Risk: an application to the measurement of the interest rate exposure of Jamaican Banks to Government of Jamaica (GOJ) Bonds, Bank of Jamaica (http://www.ccmf-uwi.org/files/publications/conference/2009/papers/9_2-Tracey-p.pdf)