KOPÁNYI SZABOLCS

# A dinamikus hozamgörbe-modellezés alapjai

**A cikk a dinamikus hozamgörbebecslés koncepcióját tárgyalja dióhéjban az irodalomban legelterjedtebb két modellcsalád, az affin és a kvadratikus modellek bemutatásával. Az affin modellek jó kiindulópontot jelentenek a modellezésben, hiszen a modellek viszonylagos egyszerűsége előnyösebb, mint a jóval több számítást igénylő kvadratikus modellek. Az egyszerűség ára azonban az, hogy trade-off kapcsolat áll fenn a hozamvolatilitás szerkezete és a kockázati tényezők közötti korreláció között. A kvadratikus modellek nagy újítása ezzel szemben, hogy a négyzetes függvényalak önmagában biztosítja a hozamok nemnegativitását, és – az affin modellekre jellemző „béklyó" hiányában – változatosabb struktúrákat is képesek leírni.**

## 1. BEVEZETÉS: A HOZAMGÖRBEBECSLÉS PROBLÉMAKÖRÉNEK ISMERTETÉSE

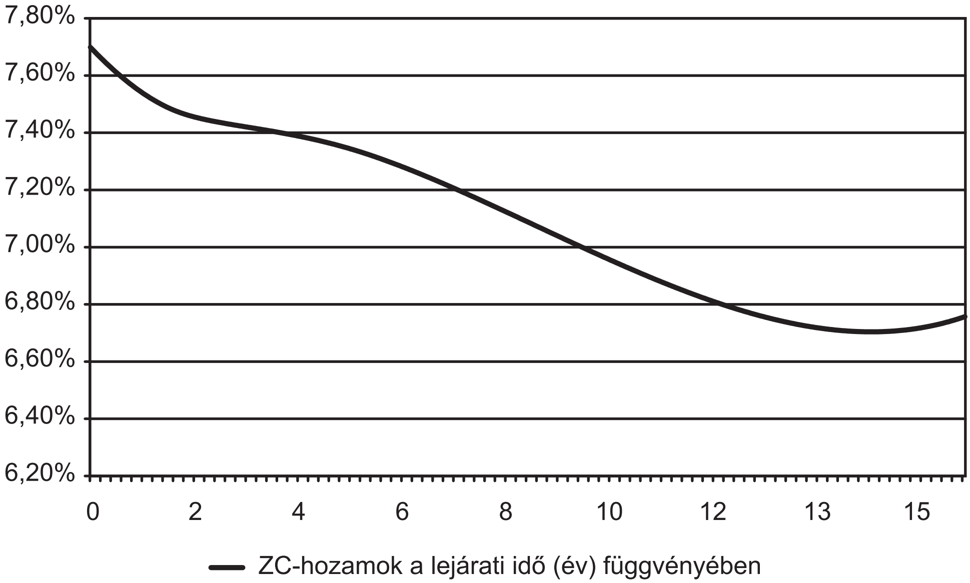
A kötvények jövőbeli pénzáramlásra vonatkozó követelések megtestesítői, a pénz időértékét mutatják. A különböző időpontbeli pénzáramlások között a hozamgörbe biztosítja az átjárhatóságot. Hiába kiemelt fontosságú[1], a hozamgörbe közvetlenül nem megfigyelhető.

A hozamgörbe becslése a pénzügytan két különböző, ám egymáshoz mégis kapcsolódó problémájává fejlődött. Az első megpróbál a lejárati idő függvényében folyamatos hozamgörbét előállítani valamely piacon megfigyelt, kereskedhető árak felhasználásával. A görbe egyfajta pillanatképnek tekinthető egy adott piacról, mint ahogy azt a következő ábra mutatja a magyar kötvénypiacra vonatkozóan.

1 A hozamgörbe vizsgálata fokozott igényként merül fel az alábbi területeken:
1. a jövőbeli hozamok előrejelzése, döntéstámogatás a gazdasági szereplők részére (cégek beruházási döntései, magánszemélyek megtakarítási döntései),
2. monetáris politika, valamint annak hatásmechanizmusa,
3. államkincstári adósságmenedzsment (pl. lejárati szerkezet kérdése),
4. kamatláb-derivatívok árazása és hedgelése (pl. a legbonyolultabb kamatláb-derivatívok és a vaníliakötvények (lásd: Arrow–Debreu-árak) értéke egyaránt a hozamoktól függ).

*1. ábra*

**ÁKK-zérókupon hozamgörbéje (2008. január 2.)**




*Forrás:* Államadósság Kezelő Központ (ÁKK)

Tegyük fel, hogy zérókupon-hozamgörbe számítását tűztem ki célul. Egy folytonos görbét szeretnék kapni a lejárat függvényében, de akadályokba ütközöm. Egyrészt a piacon kamatfizető kötvényekkel kereskednek YTM-mel[2] vagy árfolyamjegyzéssel, másrészt a lejáratok száma még a leglikvidebb piacok esetén is ritkák, azaz folytonosságról szó sincs. A piac egészét tekintve a cash flow-dátumok száma meghaladja a kötvények (árfolyamok) számát, ráadásul az egyes árfolyamok, illetve hozamok megfigyelési hibát tartalmazhatnak a piaci szokványok következményeként (pl. bid-ask spread, kerekítés, on-the-run[3] és off-the-run[4] sorozatok közötti különbségek, adózási szabályok eltérítő hatása stb.). A görbe számítását elvégezhetjük bootstrap módszerrel, egyszerű[5] és általánosított[6] legkisebb négyzetek módszerével történő lineáris regresszióval, illetve a hozamgörbe alakját modellezni próbáló eljárással[7] (pl. harmadfokú spline függvény).

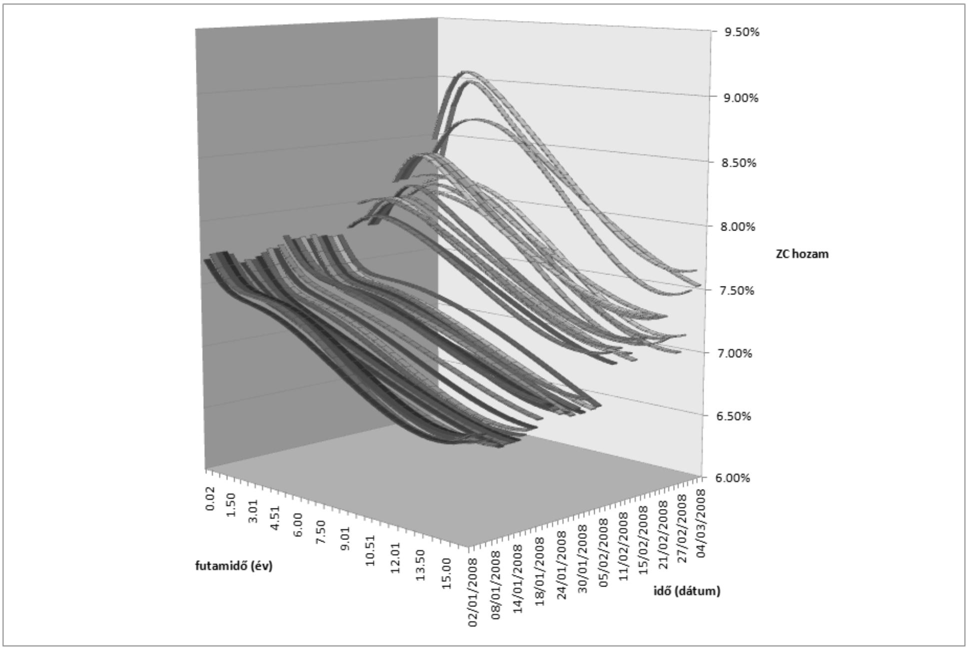
A második probléma – amelyből jelen írásunk ízelítőt kíván bemutatni – a hozamok, illetve a hozamgörbe dinamikájának leírását célozza. A kérdés: hogyan írhatjuk le a hozamok időbeli alakulását? Hasonló koncepció ez, mint amikor egy részvény vagy éppen deviza ár-

2 Yield to maturity – lejáratig számított hozam
3 A jövőbeli kibocsátási tervben szereplő, éppen aukcionált kötvény.
4 Korábban aukcionált kötvény, amelynek esetében rábocsátás már nem lesz.
5 Ordinary Least Squares (OLS)
6 Generalized Least Squares (GLS)
7 Ezek a különféle yield curve fitting, azaz hozamgörbe-illesztési módszerek.

folyamának időbeli alakulását akarjuk megérteni. Azért csak hasonló, mert a hozamgörbe – a részvény- és devizaárfolyammal ellentétben – természetét tekintve nem skalár mennyiség. A hozamgörbe egyes pontjai között nem állhat fenn akármilyen kapcsolat, ügyelni kell arra, hogy az arbitrázsmentesség elve érvényesüljön. Ez utóbbi nézőpontot[8] szemléltetendő, az 1. ábra hozamgörbéje az alábbi módon alakult 2008. január 2-a és március 3-a között:

*2. ábra*

**ÁKK-zérókupon hozamgörbéjének alakulása**
**(2008. január 2.–március 3.)**




*Forrás:* Államadósság Kezelő Központ (ÁKK)

A panelvizsgálat mellett a dinamikus hozamgörbebecslés témakörébe tartozik az egyszerű idősorelemzés is, amikor nem a teljes hozamgörbe lefutását, hanem annak csupán egy kiválasztott pontját kísérjük figyelemmel az idő függvényében. Az idősorok felhasználása mellett a második kulcskérdés a kamatlábmodell kiválasztása. A megfelelő kamatlábmodell megtalálása önmagában felettébb bonyolult feladat, hiszen csupán a jegyzett pénzügyi irodalomban több tucatnyival találkozhatunk. „Jolly Joker” kamatlábmodell nem létezik, ezért előfordul, hogy a kutatók, illetve piaci szereplők a becslés részeként határozzák meg magát a modellt is (nemparaméteres vizsgálat). A strukturált modellalapú becslés célja a kamatlábmodellben szereplő sztochasztikus változó(k) eloszlásának meghatározása; amennyiben ez nem megvalósítható (a legtöbb esetben az árazó differenciálegyenlet megoldhatatlan), az

8 Panelvizsgálat

eloszlás egyes momentumait szokás megbecsülni. A sztochasztikus változó maga gyakran nem figyelhető meg (pl. volatilitás a többtényezős modellekben), ekkor először azt is becsülni kell valamilyen módszerrel. A vizsgálati modellek felállításának csak a szűk fantázia vagy a csillagos ég szab határt.

A becslési eljárás lefolytatását követően még nem pukkan a pezsgő, hiszen a becslő modellt statisztikai és közgazdasági szempontból egyaránt értékelni kell. Statisztikailag meg kell vizsgálni, hogy a becslési hibák tulajdonságai megegyeznek-e az előre feltételezettel (pl. várható érték zérus). Közgazdaságilag azt kell ellenőrizni, hogy a modell jól magyarázza-e a kötvényhozamokat, illetve árfolyamokat a vizsgált piacon. Ha eltérés mutatkozik, annak kettős oka lehet. Egyrészt kiderülhet, hogy rossz modellel számoltunk, másrészt kétely merülhet fel a piac hatékonyságát illetően.

## 2. Hozamgörbebecslés strukturált modellekkel

A strukturált modell alapú[9] becslés egy zárt hozamgörbemodellt vesz alapul, majd ennek paramétereit számítja ki, illetve becsli.

A strukturált hozamgörbemodellek megszorításokat vezetnek be a hozamgörbe egyes pontjainak relatív változásait figyelembe véve, így biztosítják az arbitrázsmentességet, továbbá normálistól eltérő eloszlásokat is megengednek a hozamokban. Az említett megszorítások a magyarázó változók állapotdinamikájából és a kockázat piaci árának modellben szereplő alakjából vezethetők le. Szerepük rendkívül fontos: egyrészt biztosítják a konzisztenciát a hozamok dinamikájában, másrészt lehetővé teszik a kockázati prémiumok leválasztását a jövőbeli kamatlábak várható értékétől. *Sargent* [1979] korai cikke a várakozási hipotézis következtetését vonja le, ahol a befektető hosszú kötvények tartásával várhatóan nem realizálhat extraprofitot. Az újabb vizsgálatok (pl. *Bekaert* és *Hodrick* [2001]) ezzel szemben úgy látják, hogy a befektetők hosszú futamidejű kötvények tartásával szisztematikusan nagyobb extraprofitot érhetnek el, mint rövid futamidejű kötvényekkel, azonban ez a szisztematikus különbözet időben nem állandó. A hozamgörbe konzisztenciájából fakadó megszorítások ezt a kockázati prémiumot is modellezik.

A hozamgörbemodellek számos trade-off szempont szerint csoportosíthatók, ezek

1. a modell időbeli felfogása alapján: folytonos idejű, illetve diszkrét idejű modellek,
2. a modellezés elsődleges célja szerint: egyensúlyi, illetve no-arbitrage modellek,
3. a modellben szereplő változók száma szerint: 1, 2, ..., *N* változós modellek,
4. a modellváltozók közötti függvénykapcsolat szerint (a teljesség igénye nélkül): affin, kvadratikus, rezsimváltó és ugró-diffúziós modellek.

9 A témában az első lépéseket Sargent [1979] tette meg, amikor vektor-autoregressziós (VaR-) modellel becsülte a várakozási elmélet teljesülését. Pearson és Sun [1994] a pillanati kamatláb (SR) mellett az inflációt azonosította mint látens tényezőt; Litterman és Scheinkman [1991] széles körben ismertté vált cikkében három látens faktorral, nevezetesen hozamszinttel, meredekséggel és púpossággal magyarázta a mintabeli hozamváltozások 97 százalékát; Dai és Singleton [2000] hozamszintet, meredekséget és egy ún. „pillangótényezőt" különböztet meg, ami gyakorlatilag egyenértékű a hozamgörbe púposságával.

A *folytonos idejű modell* választása mellett szól:

- Nincs ideális időintervalluma a vizsgálódásnak, a folytonos idejű modellben egyszerűen megkerüljük a választás problematikáját.
- A folytonos idejű modellek módszertana rendkívül bőven dokumentált az irodalomban. Kevés, de fontos esetben zárt képlettel számítható a kötvények, illetve kamatláb-derivatívok ára.
- Ha mégsem számolhatók az árak zárt képlettel, számos becslési eljárás és numerikus módszer közül választhat a modellező.
- Ezzel szemben a *diszkrét idejű modellek* előnye:
- A valóság nem folytonos időben zajlik, az árak egyik időpontról a másikra változnak (az időbeli tranzakciós költségeknek van elméleti alsó határa).
- A diszkrét modelleket sokszor könnyebb megérteni (pl. binomiális modellek).
- Mire megyünk a folytonos modellekkel, ha azokat úgyis diszkrét modellekkel kell becsülnünk (numerikus eljárások)?

Az *egyensúlyi modellek*[10] elsődleges célja a hozamgörbe előrejelzése, illetve kötvény-kereskedési stratégiák kidolgozása[11]. Az úttörő hozamgörbemodellek ebbe a csoportba tartoznak, ezért az egyensúlyi modelleket gyakran klasszikus modellekként említik. Főbb alkotóelemei a pillanati kamatláb (short rate, továbbiakban SR) sztochasztikus dinamikájára, valamint a befektetők preferenciáira (pl. kockázati prémiumok kérdésére, kockázat piaci árára) vonatkozó feltevések. A modell endogén módon határozza meg a hozamgörbét, az így kapott eredmény és a piaci mintaadatok között gyakran eltérés van. Mindemellett az egyensúlyi modellek kétségtelen előnye a belső konzisztencia, azaz a modellparaméterek viszonylag állandók az időben.

A *no-arbitrage modellek*[12] definíció szerint tökéletesen illeszkednek a piaci mintaadatokra. Az arbitrázsmentes érvelés legfőbb előnye, hogy a kamatláb-derivatívok árára nem hatnak a befektetői preferenciák. A pontos illeszkedés hátránya viszont, hogy a modellekre nem jellemző a belső konzisztencia: a modellparamétereket minden egyes becslésnél újra kell becsülni, azok hevesen ingadozhatnak az idő múlásával.

A *kevés modellváltozó és viszonylag egyszerű függvénykapcsolat* mellett szól, hogy így a modellezés egyszerűbb, valamint nagyobb az esélye annak, hogy az árfolyamok zárt képlettel számíthatók. *Több modellváltozó és bonyolultabb függvénykapcsolat* bevezetése akkor szokott előtérbe kerülni, ha máshogy nem lenne biztosítható a modell megfelelő komplexitása és rugalmassága, azaz csak némi bonyolítás árán növelhető a modell valóságot leíró képessége.

Az affin modellekben[13] (l. *Duffie* és *Kan* [1996], *Dai* és *Singleton* [2000]) lineáris kapcsolat van a modellváltozók között, a kvadratikus modellek[14] (l. *Ahn* és szerzőtársai [2002], Ahn és szerzőtársai [2003], valamint *Leippold* és *Wu* [2002]) ezzel szemben túllépnek a linearitás határain és – legalábbis utóbbi szerzők szerint – jobb a valóságot leíró képességük. A rezsimváltó modellek (l. *Bansal* és *Zhou* [2002]; Bansal és szerzőtársai [2004]) és az

10 pl. Vasicek [1977], Cox és szerzőtársai [1985], Brennan és Schwartz [1979]

11 Tuckman [1995]

12 Heath és szerzőtársai [1992], Ho és Lee [1986]

13 Affine Term Structure Model (ATSM)

14 Quadratic Term Structure Model (QTSM)

ugró-diffúziós modellek (l. Duffie és szerzőtársai [2000]) a hagyományos diffúziós dinamikát kiegészítik sokkhatásokkal, ezzel is növelve a modellek valószerűségét.

## 3. Affin modellek

Általánosságban egy $N$ tényezős affin[15] hozamgörbemodell két feltételezésre épít. Az egyik, hogy a SR valamely $\mathbf{X}_t$ állapotvektor affin függvénye:

$$r_t = \delta_0 + \sum_{i=1}^{N} \delta_i X_{i,t} = \delta_0 + \boldsymbol{\delta}'_x \boldsymbol{X}_t , \tag{1}$$

a másik, hogy az $\mathbf{X}_t$ állapotvektor dinamikája az alábbi módon írható le:

$$d\boldsymbol{X}_t = \widetilde{\boldsymbol{K}}\left(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}} - \boldsymbol{X}_t\right)dt + \boldsymbol{\Sigma}\sqrt{\boldsymbol{S}_t}\,d\widetilde{\boldsymbol{W}}_t , \tag{2}$$

ahol $\mathbf{S}_t$ egy $N \times N$ diagonális mátrix, aminek $i$-edik átlóbeli eleme

$$[\boldsymbol{S}_t]_{ii} = \alpha_i + \boldsymbol{\beta}'_i \boldsymbol{X}_t \tag{3}$$

alakú. Az $N$ darab $Q$ mérték szerinti Brown-mozgás $(\widetilde{\boldsymbol{W}}_t)$, független, az $\mathbf{X}_t$ innovációinak együttmozgását az $N \times N$ dimenziójú $\Sigma$ mátrix írja le, $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ szintén $N \times N$ mátrix[16].

Fontos megjegyezni az állapotváltozók dinamikájára vonatkozóan, hogy a (2)-es egyenletben szereplő driftek (trendtagok) és a (3)-as egyenletben szereplő feltételes varianciák egyaránt affinok $\mathbf{X}_t$-re nézve, azaz felírhatók annak affin függvényeként.

A $\tau$[17] hátralévő futamidejű $P_{t,T}$ zérókuponkötvény árfolyamát a $t$ időpontban az

$$P_{t,T} = \exp[A_\tau + \boldsymbol{B}'_\tau \boldsymbol{X}_t] \tag{4}$$

egyenlet[18] írja le. Itt $A_\tau$ egy skalár, $\mathbf{B}_\tau$ pedig egy $m \times 1$ vektor. A zérókupon-kötvényárfolyamok logaritmusa tehát szintén felírható affin formában.

Ha valós adatokon kívánjuk próbára tenni a (4)-es árazó képletet, a valós $P$ mérték szerint is ismernünk kell $\mathbf{X}_t$ és $P_{t,T}$ eloszlását. Ehhez a kockázat piaci árára, $\mathbf{\Lambda}_t$-re vonatkozóan kell nyilatkoznunk. Feltéve, hogy

$$\boldsymbol{\Lambda}_t = \sqrt{\boldsymbol{S}_t}\boldsymbol{\lambda} , \tag{5}$$

ahol $\boldsymbol{\lambda}$ egy konstansoktól álló $N \times 1$ vektor, $\mathbf{X}_t$ valós $P$ mérték szerinti dinamikájára vonatkozóan szintén affin[19] egyenletet kapunk:

15 Konstans plusz lineáris tag formában felírható.

16 Ennek az elemei az átlaghoz visszahúzó folyamatoknál a visszahúzás erősségét határozzák meg.

17 $\tau = T - t$

18 Duffie és Kan [1996]

19 Előfordulhat az is, hogy $\mathbf{X}_t$ $Q$ mérték szerint affin, a valós $P$ mérték szerint viszont nem affin dinamikával bír, ehhez a kockázat $\mathbf{\Lambda}_t$ piaci árának eltérő specifikációjára van szükség, l. Duffee [2002].

$$dX_t = K(\Theta - X_t)dt + \Sigma\sqrt{S_t}dW_t \quad . \tag{6}$$

A fenti egyenletben $W_t$ $P$ mérték szerint független Brown-mozgásokból álló $N$-dimenziós vektor, $K = \widetilde{K} - \Sigma\Phi$, $\Theta = K^{-1}(\widetilde{K}\widetilde{\Theta} + \Sigma\psi)$, $\Phi$ mátrix $i$-edik sora $\lambda_i \beta'_i$ formában írható, $\Psi$ $N$ elemű vektor $i$-edik eleme $\lambda_i a_i$ alakú.

Az affin modellek alkalmazásának gyakori előnye a kötvényárfolyamok analitikus számolhatósága[20], továbbá a viszonylag egyszerű felépítés és becslési folyamat. A könnyű számíthatóság ára azonban az állapotvektor kockázatmentes dinamikájára vonatkozó megszorítások formájában jelentkezik. Az állapotvektor kockázatmentes mérték szerinti dinamikájának affin diffúziónak kell lennie. Ez azt jelenti, hogy esetében mind a pillanatnyi várható érték, mind pedig a variancia felírható affin függvény formájában. Az állapotvektor adatgeneráló folyamatának függvényalakjára vonatkozóan nincsenek megszorítások. Ez azonban egyben azt is jelenti, hogy konfliktus merülhet fel az állapotvektor dinamikája és az adatgeneráló folyamat között. Előfordulhat ugyanis, hogy az állapotvektorra vonatkozó megszorítások eredményeképpen olyan adatgeneráló folyamathoz jutunk, amely képtelen a mintában szereplő hozamokat produkálni.[21] *Aït-Sahalia* és *Hansen* [2004] szerint akkor áll fenn az említett szerencsétlen eset, ha a kockázati prémiumok szigorúan pozitív többlethozamot eredményeznek a várható kockázatmentes hozam felett. Az affin modellek hátránya, hogy lineáris voltukból adódóan, gyakran képtelenek kezelni a hozamgörbe jól ismert[22], stilizált tényeit: nemlineáris drift és diffúziós együtthatók[23], heteroszkedaszticitás[24] stb.

## *3.1. Dai és Singleton [2000] rendszerezése*

Az affin modellek tanulmányozásában különlegesen értékes Dai és Singleton [2000] munkássága. A szerzőpáros jelentős űrt töltött be a hozamgörbemodellek irodalmában: átfogó rendszerezést készített a modellcsaládra, feltárva az egyes modellek közötti strukturális, valamint empirikus illeszkedési különbségeket. Ezekre a kérdésekre korábban – az affin modellek mélyreható elméleti elemzése és kiterjedt gyakorlati alkalmazása ellenére – nem fektettek hangsúlyt a kutatók. A rendszerezés alaplogikája az alábbi.

1. Elsődleges lépés annak vizsgálata, hogy az adott modellben analitikus képlettel számíthatók-e a zérókuponkötvények árfolyamai. Dai és Singleton [2000] megengedhetőségi (admissibility) kérdésnek nevezi ezt. Ez érthető is, hiszen az affin modellek egyik erőssége éppen a ritka, de annál jelentősebb esetekben jelentkező zárt képlet a zérókuponkötvény-árfolyamra.[25] A továbbiakban az „analitikusan számolható” jelzővel fogok hivatkozni az „admissible” modellekre a szó szerinti fordítás esetlensége miatt.

20 Erre admissibility, illetve tractability néven hivatkozik az irodalom.

21 Azaz a vizsgálat eredménye az, hogy a mintában szereplő adatok elő sem fordulhattak volna.

22 Legalábbis az amerikai adatokra vonatkozóan.

23 L. Aït-Sahalia [1996a], [1996b]

24 Pl. különféle ARCH-modellek

25 Meg kell jegyeznünk, hogy az empirikus alkalmazásokban nagyon sokáig nem merült fel az admissibility kérdése, mert a normális eloszlású és CIR-modellekben eleve biztosított a zérókuponkötvény-árfolyamok zárt képlettel történő számíthatósága (l. Duffie és Kan [1996]).

2. A szerzőpáros bemutatja, hogy valamennyi analitikusan számolható $N$ tényezős affin modell (ezek alkotják az $N$ tényezős modellek családját) egyértelműen és átfedéstől mentesen besorolható $N$+1 alcsoportba. Itt a besorolás a (4)-es egyenletben szereplő $\mathbf{B'}_\tau$ rangját jelölő $m$ szerint történik, ami nem más, mint az $\mathbf{X}_t$ független lineáris kombinációinak száma. Ez a paraméter határozza meg az $\mathbf{X}_t$ feltételes variancia mátrixát. Dai és Singleton [2000] $m$ valamennyi értékére meghatározza az analitikus számolhatóság szükséges és elégséges feltételeit.
3. Az így kapott összes $N$+1 alcsoportról elmondható, hogy helyet ad egy-egy ún. maximális modellnek. A maximális modell a modellek közötti orientációt segíti, pontosabban a következő bekezdésben jelölt kérdések megválaszolását.

Dai és Singleton [2000] megvizsgálja az irodalomban leginkább elterjedt affin kamatlábmodelleket, elhelyezi őket a feni besorolás szerint. A csoportosítás haszna akkor jelentkezik, amikor világosan összevethetővé válnak az egyes modellek az alábbi dimenziók mentén:

- A vizsgált affin modell hol helyezkedik el az adott alcsoport maximális modelljéhez képest, azaz mekkora szabadságfokkal használja ki az adott alcsoportban rendelkezésre álló lehetőségeket. Ha a modellben vannak tartalékok, úgy melyek a megszorítások a maximális modellhez képest, és ezek mennyiben korlátozzák a modell illeszkedését.
- Az adott modell vagy az adott alcsoport maximális modellje megfelelően rugalmas-e ahhoz, hogy egyaránt leírja a hosszú és a rövid hozamok időbeli alakulását a mintaidőszakban.

Elvileg célul lehetne kitűzni egy szupermaximális affin modell felállítását, amelynek az egyes alcsoportok maximális modelljei (és így természetesen áttételesen valamennyi affin modell) specializált leszármazottjai lennének. Ez azonban nem megvalósítható, mert az analitikus számolhatóság biztosításához korlátokat kell bevezetni a modellváltozók dinamikájára. Ezek a korlátok pedig olyan erős trade-off formájában jelentkeznek, hogy gyakorlatilag kizárják egy szupermaximális affin modell létezését.

Dai és Singleton cikkében a 3 tényezős modellek ($N$=3) példáján keresztül ismerhetjük meg az $X_{it}$-k $\mathbf{X}_t$-re vonatkozó feltételes varianciája és az $\mathbf{X}_t$ korrelációs mátrixának megengedhető szerkezete közötti trade-offot. A két szélső értéket a normális eloszlású modellek ($m$=0) és a korrelált négyzetgyök-diffúziós[26] modellek ($m$=3) jelentik. A normális eloszlású modellek esetében az $\mathbf{X}_t$ oszlopai között bármilyen irányú és erősségű feltételes, illetve feltétel nélküli korreláció előfordulhat, viszont a feltételes varianciák állandók, azaz a modellekben konstans a volatilitás.

A CSR-modellben ezzel szemben valamennyi állapotváltozó befolyásolja a feltételes varianciákat, az analitikus számolhatóság teljesüléséhez azonban szükséges, hogy az állapotváltozók feltételesen korrelálatlanok legyenek, sőt, a feltétel nélküli korrelációk sem lehetnek negatívak. Mindez így foglalható össze: az affin hozamgörbemodellek legfontosabb korlátja, hogy képtelenek egyszerre biztosítani az állapotváltozók közötti negatív korrelációt és az SR szigorú pozitivitását. A két szélső érték között az affin modelleknek további két

26 Correlated Square-root Diffusion (CSR)

alcsoportja van, amelyek egyikében sem állandó az állapotváltozók feltételes varianciája, továbbá az $\mathbf{X}_t$ oszlopai közötti korrelációs struktúra is (részben) szabadon változtatható.

A 3 változós affin modell trade-offban tehát a hozamvolatilitás szerkezete és a kockázati tényezők közötti korreláció áll szemben egymással. A lehetséges esetek az alábbiak:

1. $m$=0 (normális eloszlású modellek): kockázati tényezők konstans volatilitása,
2. $m$=1, 2: 1 vagy 2 állapotváltozó által befolyásolt sztochasztikus volatilitású kockázati tényezők, rugalmasabb korrelációs struktúra a kockázati tényezők között,
3. $m$=3 (CSR): mindhárom állapotváltozó befolyásolja a sztochasztikus volatilitást, viszont kizárólag pozitív korreláció engedhető meg a kockázati tényezők között.

Dai és Singleton [2000] az irodalomban elterjedt modellekben rejlő tartalékokra hívja fel a figyelmet, amikor négy ismert modellről vezeti le, hogy alulmaradnak saját alcsoportjuk maximális modelljével szemben. A 3 tényezős affin modellek 3+1=4 alcsoportba rendezhetők, azaz $m$ négy értéket (0, 1, 2 és 3) vehet fel. A szerzők bemutatják, hogy az $m$ szerinti sorrendben a normális eloszlású *Vasicek*-[27], a BDFS-[28], a *Chen*-[29] és a CIR-modellek[30] az egyes alcsoportok specializált modelljei, és egyikük sem maximális. Az irodalomból ismert valamennyi megnevesített modell – a normális eloszlású modellcsaládot leszámítva – az alcsoportjai maximális modelljéhez képest túlszabályozott az állapotváltozók egymástól való függőségének terén. Számos CSR-modell esetén (többek között *Cox* és szerzőtársai [1985], Chen és *Scott* [1993], *Pearson* és *Sun* [1994], és Duffie és Singleton [1997]) például a modellek feltételezései között szerepel az állapotváltozók függetlensége, holott az analitikus számolhatóság feltételei enélkül is biztosítottak lennének.

## 4. Kvadratikus modellek

Egy $N$ tényezős kvadratikus modellben a pillanati kamatláb az állapotvektor négyzetes függvénye:

$$r_t = \delta_0 + \sum_{i=1}^{N} \delta_i X_{i,t} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \phi_{ij} X_{i,t} X_{j,t} = \delta_0 + \delta'_x X_t + X'_t \mathbf{\Phi} X_t \,, \tag{7}$$

ahol $\mathbf{\Phi}$ az alábbi $N\times N$ dimenziójú konstansokból álló, pozitív szemidefinit mátrix.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{12} & 1 & \dots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1N} & \phi_{2N} & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Amennyiben feltesszük, hogy $\delta_0 - \frac{1}{4}\delta'_x \mathbf{\Phi^{-1}} \delta_x \geq 0$, akkor biztosított a SR nemnegativitása.

27 L. Vasicek [1977]
28 L. Balduzzi és szerzőtársai [1996]
29 L. Chen [1996]
30 L. Cox és szerzőtársai [1985]

Az állapotvektor dinamikáját leíró, sztochasztikus differenciálegyenlet átlaghoz visszahúzó, többváltozós normális eloszlású folyamat:

$$d\boldsymbol{X_t} = \widetilde{\boldsymbol{K}}\big(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}} - \widetilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{X_t}\big)dt + \boldsymbol{\Sigma} d\widetilde{\boldsymbol{W}}_{\boldsymbol{t}} \ , \tag{9}$$

ahol $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ és $\boldsymbol{\Sigma}$ $N \times N$ dimenziójú mátrixok, $\widetilde{\boldsymbol{K}}\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}$ pedig egy $N$ elemű vektor.

A kockázat piaci ára az állapotvektor lineáris függvénye:

$$\boldsymbol{\Lambda_t} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda_1 X_t}. \tag{10}$$

A $\tau$ hátralévő futamidejű $P_{t,T}$ zérókuponkötvény árfolyamát a $t$ időpontban az

$$P_{t,T} = \exp[A_\tau + \boldsymbol{B'}_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{X_t} + \boldsymbol{X'}_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{C_\tau X_t}] \tag{11}$$

egyenlet írja le. A képletben $A_\tau$ egy skalár, $\mathbf{B}_\tau$ egy $N\times1$ vektor, $\boldsymbol{C}_\tau$ pedig egy $N \times N$ elemű mátrix.

A kvadratikus modellek akkor jelentek meg az irodalomban, amikor a kutatók egyre több illeszkedési alkalmatlanságot véltek felfedezni az affin modelleknél. A négyzetes modellek alkalmazásának a legnagyobb előnye, hogy ezek a modellek – legalábbis a témában aktív szerzők szerint – gyógyírt jelentenek az affin változatok valós adatok reprodukálásakor mutatott gyengeségeire, tudják kezelni a hozamgörbe stilizált tényeit (nemlineáris drift és diffúziós együtthatók, heteroszkedaszticitás); valamint változatos korrelációs struktúrát engednek meg az állapotváltozók között. Esetükben – a négyzetes formából fakadóan – az állapotváltozók korrelációs struktúrájára vonatkozó megszorítások nélkül biztosítható a hozamok pozitivitása.

A kvadratikus modellek történelmének főbb megállóhelyei a következők: az úttörő kísérlet *Longstaff* [1989] kettős négyzetgyök modellje volt, amit később *Beaglehole* és *Tenney* [1991], valamint Beaglehole és Tenney [1992] fejlesztett tovább, illetve általánosított. A Beaglehole és Tenney [1991] cikk képzeletbeli fonalát vitték tovább *Karoui* és szerzőtársai [1992]. *Jamshidian* [1996] a termékárazás terén alkotott újat: prezentálta a kötvényárazáshoz szükséges differenciálegyenleteket a standard QTSM-esetben, valamint utóbbiak egyik alcsoportjára [független Markov-folyamatok] vonatkozóan bemutatott egy opcióárazó képletet is. *Constantinides* [1992] SAINTS-modellje[31] egy alcsoport a standard QTSM-osztályon belül, ahol az árazó mag[32] a modellben exogén módon a Markov-folyamat időben szeparálható kvadratikus függvényeként definiált. *Rogers* [1997], valamint Leippold és Wu [1999] potenciálként modellezték az árazó magot, az általuk bemutatott esetek egy részében a SAINTS-modellhez hasonlóan az árazó mag a Markov-folyamat időben szeparálható kvadratikus függvénye. A SAINTS-modell általánosításának tekinthető Ahn [1995] cikke.

31 Squared-autoregressive-independent-variable nominal term structure, azaz négyzetes autoregresszív független változós nominális hozamgörbemodell

32 Más néven sztochasztikus diszkontfaktor: ez a függvény biztosítja a pénz időértékének érvényesülését a modellbeli sztochasztikus gazdaságban.

### *4.1. Hol mutatnak újat a kvadratikus modellek affin társaikhoz képest?*

A kvadratikus esetben a négyzetes függvényalak biztosítja a hozamok nemnegativitását, ezzel ellentétben az ATSM esetében ez csak akkor áll fenn, ha $m=N$ (CIR-modell). Ha ugyanis $m<N$, és egy vagy akár több normális eloszlású állapotváltozó negatív értéket vesz fel, akkor ezekben az állapotokban az affin függvényalak lehetővé teszi, hogy a hozamok negatív értéket vegyenek fel.

További különbség a két modellcsalád között, hogy QTSM-ek esetén a nominális kamatlábak és a kötvényárfolyamok feltételes volatilitása heteroszkedaszticitás jeleit mutatja. Az állapotváltozók volatilitása még homoszkedasztikus, azonban a hozamok szintjén megjelenik a heteroszkedaszticitás.

A kvadratikus modellek esetében nincs megszorítás a kockázati tényezők közötti korreláció előjelére vonatkozóan, így ezek változatosabban modellezik a hozamvolatilitás szerkezetét. Ezzel szemben általános affin esetben $m$ darab állapotváltozó határozza meg a sztochasztikus volatilitást. A 3. fejezetben bemutatottak szerint az ATSM-eknél trade-off kapcsolat áll fenn a sztochasztikus hozamvolatilitás szerkezete és a kockázati tényezők közötti feltételes korreláció között. A modellekben $m$ darab állapotváltozó követ négyzetgyökfolyamatot, a maradék $N–m$ tényező pedig normális eloszlásút. Az analitikus számolhatóság feltétele a modellben, hogy az $m$ darab négyzetgyökfolyamat között nemnegatív legyen a korreláció. Így jutunk vissza az előző ponthoz: az egyedüli ATSM, ami „gyárilag" garantálja a hozamok nemnegativitását, az $m=N$ eset, ahol valamennyi állapotváltozó négyzetgyökfolyamatot követ.

Az affin és a kvadratikus modellek kapcsolata egyszerűsített értelemben triviális: az affin modellek a négyzetes tagtól megtisztított, azaz korlátozott kvadratikus modellek. Mindez nem véletlen: történelmileg az affin modellek illeszkedési hiányosságai terelték a kutatókat a kvadratikus modellek irányába. Ugyanígy az affin modelljeik magyarázó erejével elégedett kutatók közül többen nem nyitottak kvadratikus irányba. A gyakorlati modellbecslés során természetesen tesztelhető is, hogy egy adott mintában megéri-e a ráfordított többletidőt (a kvadratikus modellek bonyolultsága miatt a becslés számításigényesebb) a kvadratikus modellek által hozott illeszkedés javulás.

Az affin és a kvadratikus modellek kevésbé triviális kapcsolatára hívja fel a figyelmet *Cheng* és *Scaillet* [2007] cikke. Ebben a szerzők az ugrófolyamatokkal bővített affin[33] és az általános kvadratikus modelleket[34] tekintik kiindulópontnak, ezt a két osztályt hozzák egy tető alá. A Cheng és Scaillet [2007] által javasolt modellben (LQJD: linear-quadratic jump-diffusion) az állapotvektor egy lineáris ugrófolyamatból és egy lineáris és kvadratikus elemeket egyaránt tartalmazó diffúziós tagból áll, továbbá a kockázat piaci árát sem köti a linearitás. A cikk fontos állítása, hogy az LQJD-modellek pszeudo-állapotváltozók bevezetésével kölcsönösen megfeleltethetők az affin modellcsaláddal, igaz nem pontosan a Dai és Singleton [2000] által jelzett értelemben. Mindez egyúttal azt is jelenti, hogy már az affin modellspecifikáció is jóval több lehetőséget biztosít a modellezésben, mint azt számos, eltérő függvényalakot erőltető szerző hirdeti.

33 L. Duffie és Kan [1996], valamint Duffie és szerzőtársai [2000]
34 L. Ahn és szerzőtársai [2002] valamint Leippold és Wu [2002]

## 5. Összefoglalás

A bankok mindennapi gyakorlatukban legtöbbször statikus modellben elemzik a hozamgörbét, illetve becslik annak alakulását. A dinamikus modell segítségével jobban érthetővé válnak a hozamgörbe időbeli alakulásának mozgatórugói. A pontosabb leírás pedig több jobban használható információt jelent, így a befektetett energia bőségesen megtérülhet. Egy jó modell[35] ráadásul szerencsés esetben még egyfajta előrejelzési eszközként is alkalmazható lehet.

A cikk az irodalomban legelterjedtebb két modellcsaládot, az affin és a kvadratikus modelleket mutatta be ízelítő jelleggel. A gyakorlatban az affin modellek népszerűsége könnyen érthető, hiszen a modellek viszonylagos egyszerűsége előnyt jelent a jóval számításigényesebb kvadratikus modellekhez képest. Sőt, a cikkben felsorolt affin modelleket érintő hivatkozások bátorító eredményeket mutatnak fel empirikus téren is. A kvadratikus modellek nagy újítása, hogy a négyzetes függvényalak – az affin modellekkel ellentétben – a hozamvolatilitás szerkezete és a kockázati tényezők közötti korreláció között fennálló kapcsolat szabadságának megtartása mellett biztosítja a hozamok nemnegativitását.

A szerző a magyar állampapírok piaci árfolyamaiból – az Államadósság Kezelő Központ által naponta számított zérókupon-hozamgörbét felhasználva – jelenleg becsli az irodalomban legelterjedtebb affin modelleket. Kutatásának célja annak megállapítása, hogy az affin modellek megfelelően írják-e le a hazai zérókupon-hozamgörbe dinamikáját a 2000–2008 közötti megfigyelési időszakban, illetve jobb illeszkedés formájában megtérül-e a kvadratikus modellekbe fektetett számítási időtöbblet.

## Irodalomjegyzék


Ahn, D. H. [1995]: A generalized squared autoregressive intertemporal term structure model, University of North Carolina Working Paper, 1995

Ahn, D. H.–Dittmar, R. F.–Gallant, A. R. [2002]: Quadratic term structure models: Theory and evidence, *The Review of Financial Studies*, 2002. 1., 243–288. o.

Ahn, D.H.–Dittmar, R. F.–Gallant, A. R.–Gao, B. [2003]: Purebred or hybrid: Reproducing the volatility in term structure dynamics, *Journal of Econometrics*, 2003. 3., 147–180. o.

Aït-Sahalia, Y. [1996a]: Nonparametric pricing of interest rate derivative securities, *Econometrica*, 1996. 5., 527–560. o.

Aït-Sahalia, Y. [1996b]: Testing continuous-time models of the spot interest rate, *Review of Financial Studies*, 1996. 2., 385–426. o.

Aït-Sahalia, Y.–Hansen, L. P. (szerk.) [2004]: Handbook of Financial Econometrics, North-Holland, 2004

Balduzzi, P.–Das, S. R.–Foresi, S.–Sundaram, R. [1996]: A simple approach to three factor affine models of the term structure, *Journal of Fixed Income*, 1996. 12., 43–53. o.

Bansal, R.–Tauchen, G.–Zhou, H. [2004]: Regime shifts, risk premiums in the term structure and the business cycle, *Journal of Business & Economic Statistics*, 2004. 10., 396–409. o.

Bansal, R.–Zhou, H. [2002]: Term structure of interest rates with regime shifts, *Journal of Finance*, 2002. 10., 1997–2043. o.


35 Első lépésként nyilvánvalóan fontos, hogy a modell egy vizsgált időszakban jól magyarázza a hozamgörbe változásait. Másodszor backtesting eljárással érdemes megvizsgálni a modell tényleges előrejelzési képességét. Harmadszor érdemes hangsúlyozni, hogy bármilyen eredmény óvatosan kezelendő, főleg olyan turbulens időkben, mint a maiak, amikor sok esetben alapjaiban változnak meg a „játékszabályok”.

Beaglehole, D. R.–Tenney, M. S. [1991]: General solutions of some interest rate-contingent claim pricing equations, *Journal of Fixed Income*, 1991. 9., 69–83. o.

Beaglehole, D. R.–Tenney, M. S. [1992]: A nonlinear equilibrium model of the term structure of interest rates: Corrections and additions, *Journal of Financial Economics*, 1992. 12., 345–353. o.

Bekaert, G.–Hodrick, R. [2001]: Expectations hypothesis tests, *Journal of Finance*, 2001. 8., 1357–1394. o.

Brennan, M. J.–Schwartz, E. S. [1979]: A continuous time approach to the pricing of bonds, *Journal of Banking and Finance*, 1979. 7., 133–155. o.

Chen, L. [1996]: Stochastic mean and stochastic volatility – a three-factor model of the term structure of interest rates and its application to the pricing of interest rate derivatives, Blackwell Publishers, 1996

Chen, R. R.–Scott, L. [1993]: Maximum likelihood estimation for a multifactor equilibrium model of the term structure of interest rates, *Journal of Fixed Income*, 1993. 12., 14–31. o.

Cheng, P.–Scaillet, O. [2007]: Linear-quadratic jump diffusion modeling, *Mathematical Finance*, 2007. 10., 575–598. o.

Constantinides, G. [1992]: A theory of the nominal structure of interest rates, *Review of Financial Studies*, 1992. 4., 531–552. o.

Cox, J. C.–Ingersoll, J. E.–Ross, S. A. [1985]: A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, 1985. 3., 385–408. o.

Dai, Q.–Singleton, K. J. [2000]: Specification analysis of affine term structure models, *Journal of Finance*, 2000. 10., 1943–1978. o.

Duffee, G. R. [2002]: Term premia and interest rate forecasts in affine models, *Journal of Finance*, 2002. 2., 405–443. o.

Duffie, D.–Kan, R. [1996]: A yield-factor model of interest rates, *Mathematical Finance*, 1996. 10., 379–406. o.

Duffie, D.–Pan, J.–Singleton, K. [2000]: Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions, *Econometrica*, 2000. 11., 1343–1376. o.

Duffie, D.–Singleton, K. [1997]: An econometric model of the term structure of interest rate swap yields, *Journal of Finance*, 1997. 12., 1287–1323. o.

Heath, D.–Jarrow, R. A.–Morton, A. [1992]: Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica*, 1992. 1., 77–105. o.

Ho, T. S. Y.–Lee, S. B. [1986]: Term structure movements and pricing interest rate contingent claims, *Journal of Finance*, 1986. 12., 1011–29. o.

Jamshidian, F. [1996]: Bond, futures and option valuation in the quadratic interest rate model, *Applied Mathematical Finance*, 1996. 6., 93–115. o.

Karoui, N. E.–Myneni, R.–Viswanathan, R. [1992]: Arbitrage pricing and hedging of interest rate claims with state variables, Université de Paris VI and Stanford University Working Paper, 1992

Leippold, M.–Wu, L. [1999]: The potential approach to bond and currency pricing, University of St. Gallen and Fordham University Working Paper, 1999. 3.

Leippold, M.–Wu, L. [2002]: Asset pricing under the quadratic class, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2002. 6., 271–295. o.

Litterman, R.–Scheinkman, J. A. [1991]: Common factors affecting bond returns, *Journal of Fixed Income*, 1991. 6., 54–61. o.

Longstaff, F. A. [1989]: A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics*, 1989. 2., 195–224. o.

Pearson, N. D.–Sun, T. S. [1994]: Exploiting the conditional density in estimating the term structure: An application to the Cox, Ingersoll, and Ross model, *Journal of Finance*, 1994. 9., 1279–1304. o.

Rogers, L. C. G. [1997]: The potential approach to the term structure of interest rates and foreign exchange rates, *Mathematical Finance*, 1997. 7., 157–176. o.

Sargent, T. J. [1979]: A note on maximum likelihood estimation of the rational expectations model of the term structure, *Journal of Monetary Economics*, 1979. 1., 133–143. o.

Tuckman, B. [1995]: Fixed Income Securities: Tools for Today's Markets, Wiley, 1995

Vasicek, O. [1977]: An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, 1977. 11., 177–188. o.