ARMAI ZSOLT

Veszteségmegoszlások meghatározása Fourier-transzformációval

A pénzintézeteknek kockázati típusonként (hitelezési, operációs és piaci) kellene meghatározni veszteségmegoszlásaikat. Ez két okból is fontos: a valódi teljesítmény mérésszükséglete és a bankok iránt támasztott tőkekövetelményeknek való megfelelés miatt. A veszteségeloszlások előállítása a valószínűségi eloszlások és karakterisztikus függvényük között meglévő, kölcsönösen egyértelmű kapcsolatra épül. A kapcsolat kihasználása Fourier-transzformációs módszerrel történik, amellyel a veszteségeloszlások előállítása gyors és numerikusan stabil. Az eljárás rugalmasságát a bemutatott numerikus példák szemléltetik.[1]

1. A VESZTESÉGMEGOSZLÁSOK MEGHATÁROZÁSÁNAK JELENTŐSÉGE[2]

A pénzintézetek teljesítményének tényszerű megítélése és mérése a hagyományos teljesítménymérési mutatóktól (például: sajáttőkearányos megtérülés, költség/bevétel hányados stb.) távol áll. A tényleges teljesítmények meghatározásában a kockázattal korrigált tőkén elért hozamnak (Return on Risk adjusted Capital – RORAC) kell központi szerepet játszania. Nem véletlen, hogy a Moody's legújabb banki minősítési rendszerében (banki scorecardjában) a RORAC kiterjedt, a napi gyakorlatban való használata jelentős súllyal szerepel a minősítési szempontok között. Ismerete nélkül a pénzintézetek menedzsmentje nem tudhatja megítélni, mely tevékenységek, üzletágak, ügyletek és ügyfelek stb. milyen mértékben járulnak hozzá a pénzintézet teljesítményéhez. A kockázattal korrigált tőkén elért hozam általánosan a következő módon határozható meg:

$$RORAC = \frac{(1 - \textit{adózási ráta})[\textit{Bruttó bevételek} - \textit{Költségek}]}{\textit{Gazdasági tőke}}$$

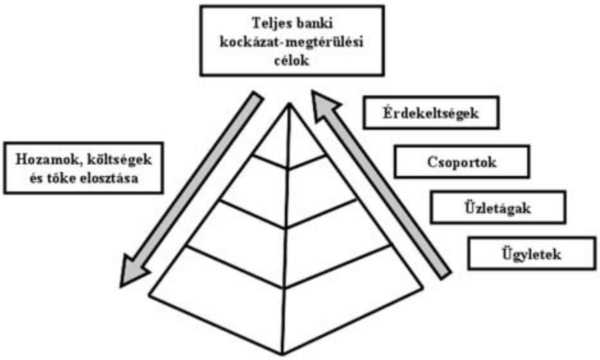
A kifejezésből látható, hogy a pénzintézetek három legfontosabb „alulról felfelé", illetve „felülről lefelé" ható eszköze a *transzferárazás* (hozamok), a *tőkeelosztás* (gazdasági tőke) és a *költségelosztás* (költségkalkuláció), amelyet az *1. ábra* szemléltet a „banki piramis" alapján.

1 A téma természeténél fogva a cikk elsősorban a matematikai formalizmusokban jártasabb olvasók számára nyújt betekintést.

2 A veszteségmegoszlás a veszteségeloszlás sűrűségfüggvénye.

1. ábra

Banki piramis



A „felülről lefelé” ható eszközöknek biztosítaniuk kell a bank globális célkitűzéseinek leosztását ex-ante szemléletben az egységek, üzletágak szintjére, míg az „alulról felfelé” eszközök funkciója az egyes egységek, ügyletek, ügyfelek, tényleges teljesítményének meghatározása ex-post szemléletben. Ennek megvalósításához szükség van a tényleges jövedelmek elosztására, amely a transzferárazás feladata; a költségek elosztására, amely a költségkalkuláció feladata; végül, de nem utolsó sorban a tőke, pontosabban a gazdasági tőke elosztására portfólió- vagy akár ügyletszinten is, amely a tőkeallokáció feladata. Csupán e három „láb” vagy eszközegyüttes megvalósításával lehetséges ésszerű teljesítményelvárásokat kitűzni, és a ténylegesen bekövetkező teljesítményeket mérni.

A menedzsmentnek fontos feladata, ha valóban tényszerű teljesítményeket akar megítélni ex-ante és ex-post, hogy e három allokációs mechanizmusnak a napi gyakorlatban való használatát megteremtse a pénzintézetekben. A *2. ábrán* összefoglaljuk e három fogalmat, a középpontba a kockázattal korrigált tőkén elért hozamot helyezzük.

2. ábra

Kockázattal korrigált tőkén elért hozam

A teljesítmények meghatározása a gazdasági tőke, a jövedelmek és a költségek ismerete nélkül csak ábránd marad a pénzintézetekben. Megjegyezzük: bár a költségelosztás a legrégebbi igény, amely minden vállalkozást érint, napjainkig is az egyik legnehezebb probléma. A transzferárazáshoz képest a gazdasági tőke meghatározása matematikailag összetettebb feladat. A gazdasági tőke fogalmi és gyakorlati bevezetése révén válnak el a pénzintézeti pénzügyek a vállalati pénzügyektől, meghatározásához szükségünk van a veszteségmegoszlások ismeretére a klasszikus kategóriák szerint: piaci, hitelezési és operációs kockázatok. A gazdasági tőke általánosan elfogadott definíciója a veszteségmegoszlás valamilyen kvantilise (Value at Risk – VaR, azaz kockáztatott érték) és a veszteség várható értéke közötti különbség (amennyiben a veszteség várható értéke árazva van, és/vagy megtörtént a céltartalékképzés). Sajnos, a VaR „automatikus” használata a Bázel II. miatt elterjedt szakmai körökben, annak ellenére, hogy igazolhatóan nem kockázati mérték. A szerző szándékosan elhagyta a „koherens” jelzőt, mert véleménye szerint amelyik kockázati „jellemző” nem koherens, az nem kockázati mérték, tehát felesleges a koherens jelző. A szerző az úgynevezett spektrálmértéket javasolná kockázati mértéknek, amelynek meghatározásánál a veszteségeloszlás és a pénzintézetek kockázatelutasítási függvénye van kombinálva. Ezzel a Bázel II. 2. pillérben (felügyeleti áttekintés) oly sokat említett „kockázati étvágy” számszerűen és konzisztensen épülhetne be például a szabályozásba is. Mivel jelen írásnak nem célja ennek ismertetése, a szerző a következő irodalmat ajánlja az érdeklődő olvasóknak: *Szegö* (szerk.) [2004]. A szerző a továbbiakban a bázeli előírásokat követi, megjegyezve azt, hogy a veszteségeloszlás ismeretében a pénzintézetek bármely kockázati mértéket meghatározhatnak.

A veszteségmegoszlások meghatározására a bankokat egy külső kényszer is rászorítja. A Bázel II-es tőkekövetelmények meghatározásánál a 2. pillér előírása szerint VaR-értékeket, illetve gazdasági tőkeszámításokat, stresszteszteket, különböző forgatókönyvek szerinti gazdaságitőke-változást tucatszámra kell meghatározniuk. Azok a bankok, amelyek az 1. pillérben (minimális tőkekövetelmények) az operációs kockázatoknál a fejlett módszert választják, szintén jelentős mennyiségű VaR-t – ha tetszik, tőkekövetelményt – kell kiszámítaniuk és validálniuk.

2. A veszteségmegoszlás meghatározásának gyakorlati szempontjai

A veszteségmegoszlások meghatározásának módszerei közötti választásnak vannak pragmatikus követelményei, amelyek fontosságát nem lehet eléggé hangsúlyozni. A választandó módszer legyen gyors, numerikusan stabil, univerzális, nagy számosságú portfóliókra alkalmazható, kombinatív, számítástechnikailag elérhető, könnyen validálható, és a teljes veszteségeloszlást határozza meg.

A gyorsaság alatt azt értjük, hogy a számítási idő ne növekedjen jelentősen a portfólió méretével, illetve azt, hogy perceken belül szolgáltassa a veszteségmegoszlást.

A numerikus stabilitás azt jelenti, hogy a kerekítési hibák ne halmozódjanak fel olyan mértékben, hogy a kapott eredmények megbízhatatlanok legyenek.

Univerzalitás alatt azt értjük, hogy a módszer eloszlásfüggetlen legyen, ne kelljen újabb számítási módszert kifejleszteni csak azért, mert az eloszlás típusa megváltozik.

Az eljárás nagy számosságú portfólióra is rövid időn belül szolgáltassa az eredményt. Gondoljunk csak egy olyan kereskedelmi bankra, amelynek hitelportfóliója pár százezer forintos hitelektől (hitelkártya) többmilliárdos hitelekig terjed!

A kombinatív képesség azt jelenti, hogy a részeredmények vagy végeredmények azonnal felhasználhatóak legyenek, akkor is, ha a rendszerben egyes értékek változnak (például forgatókönyv-elemzés vagy jelentős, de kis valószínűségű veszteségek figyelembevétele stb.)

Az algoritmus lehetőleg a szokásosan használt szoftverekben elérhető legyen.

Validáció alatt azt érjük, hogy bizonyos időperiódusokban újabb számításokat végzünk a veszteségmegoszlásra és gazdasági tőkére, és összevetjük a tőkekövetelménynyel. (Például vállalati hitelek esetében a havi minősítések után havi gazdasági tőke számítása.)

Ne csak a VaR egy becslését szolgáltassa a módszer, de a teljes veszteségmegoszlás álljon rendelkezésre.

A szerző a veszteségmegoszlások meghatározására részletesen bemutatja a Fourier-transzformációs módszert, amely a veszteségeloszlások mint valószínűségi eloszlások és az úgynevezett karakterisztikus függvényük közötti kölcsönösen egyértelmű leképezésre épül.

A módszert biztosító társaságok is széles körben használhatják biztosítási díjaik, illetve tartalékolási szükségleteik meghatározására.

3. Fourier-transzformáció, karakterisztikus függvény, valószínűséggeneráló függvény és gyors Fourier-transzformáció

3.1. A Fourier-transzformáció és a karakterisztikus függvény

Amikor 1822-ben megjelent *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768–1830) „A hő analitikus elmélete” című munkája, nem tudhatta, hogy felírta az „opcióárazás differenciálegyenletét” (*Simonyi* [1998]). A hővezetés differenciálegyenletének megoldása során bevezette a Fourier-sorokat és a Fourier-transzformációt. Arra pedig végképp nem gondolhatott, hogy e transzformáció segítségével pénzintézetek fogják meghatározni veszteségeloszlásaikat a 21. században. A Fourier-transzformáció lényegében azt jelenti, hogy bizonyos függvényosztályba tartozó függvényeket előállíthatunk koszinusz- és szinuszfüggvények összegeként. A gyakorlati alkalmazáshoz még kellett a számítástudományban is egy előrelépés. Az úgynevezett Fourier-együtthatók kiszámítása klasszikus módon igen tetemes számításokkal jár, és még a mai számítástechnikai lehetőségek ismeretében is nagy méretű feladatok megoldása igencsak gyötrelmes, vagy gyakorlatilag keresztülvihetetlen. Ez az előrelépés 1965-ben történt meg (*Cooley* és *Tukey* [1965]), amikor is a transzformáció speciális szerkezetének kihasználásával jelentősen sikerült az algoritmust gyorsítani, és numerikusan stabillá tenni. Ezt a számítási eljárást ma gyors Fourier-transzformációnak nevezzük.

E tudománytörténeti bevezető után nézzük a Fourier-transzformáció, valamint a valószínűségi eloszlások és karakterisztikus függvényeik közötti kapcsolatot, majd a valószínűséggeneráló függvény és a karakterisztikus függvények közötti kapcsolatot! Bizonyításokat nem közlünk, mivel azok megtalálhatóak a standard valószínűségszámítási tankönyvekben: *Rényi* [1968]) vagy újabban *Medvegyev* [2002].

Legyen X valós valószínűségi változó. Akkor X karakterisztikus függvényén a következőt értjük: $\varphi_X(t)=E[e^{itX}]$, ahol E a várható érték operátora és i a komplex képzetes egység.

Látható, hogy a $\varphi_X(t)$ karakterisztikus függvény minden valós t-re létezik, általában komplex függvény. A karakterisztikus függvények és a Fourier-transzformáció között közeli kapcsolat van, amely lehetővé teszi gyakorlati használatát.

Legyen f egy abszolút integrálható valós függvény! Ekkor létezik Fourier-transzformáltja, amelynek definíciója

$$\mathsf{F}f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx.$$

Ebből következik, hogy ha X valószínűségi változónak f a sűrűségfüggvénye, akkor f-nek a Fourier-transzformáltja a karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_X(t) = \mathsf{F}f.$$

Ha f abszolút integrálható, akkor $\mathsf{F}f$, azaz Fourier-transzformáltja is abszolút integrálható, és

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\mathsf{F}f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt,$$

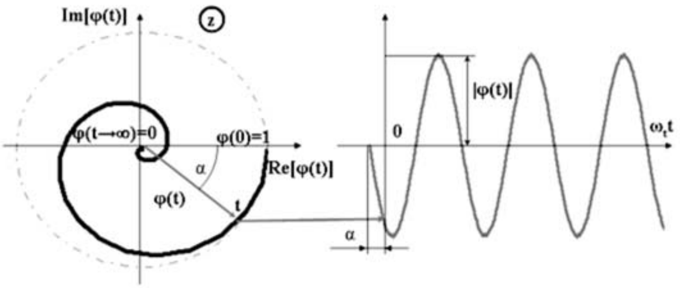
amelyet inverz Fourier-transzformációnak nevezünk.

Az utóbbi kifejezés nemcsak azt mondja, hogy a karakterisztikus függvény, azaz a veszteségmegoszlás karakterisztikus függvényének ismeretében kiszámítható a veszteségmegoszlás, hanem azt is, hogy hogyan lehet meghatározni.

Mielőtt ismertetnénk a karakterisztikus függvény főbb tulajdonságait, intuitív elképzelést szeretnénk megmutatni a veszteségmegoszlás és a Fourier-transzformáció között. Ha felírjuk az Euler-relációt $e^{ix}=cos(x)+isin(x)$, akkor látható, hogy a veszteségeloszlást előállítottuk különböző amplitúdójú koszinusz- és szinuszfüggvények („hullámok”) összegeként, amikor is a hullámok frekvenciája és amplitúdója folytonosan változik. Ha az integrált közelítjük egyes pontokban, akkor a periodikusnak képzelt veszteségmegoszlást felírtuk véges sok különböző amplitúdójú és frekvenciájú koszinusz- és szinuszfüggvények segítségével, ahol a frekvenciák és az amplitúdók már diszkrét értékeket vesznek fel. Ezt nevezik Fourier-sornak. A funkcionálanalízis geometriai szemléletének segítségével, és tudva azt, hogy a megfelelő hullámok önmagukkal vett szorzatának integrálja a periódusra 1-et, míg különböző frekvenciájú hullámok szorzatának integrálja nullát ad ki, mondhatjuk azt, hogy a veszteségmegoszlást felírtuk egy ortonormált bázisban, ahol a bázist („egységvektorok”) is függvények – koszinusz- és szinuszfüggvények – adják. A *3. ábra* jobban megvilágítja, miről is van szó. A veszteségmegoszlás periódusának egy maximálisan felvehető veszteséget tekinthetünk.

3. ábra

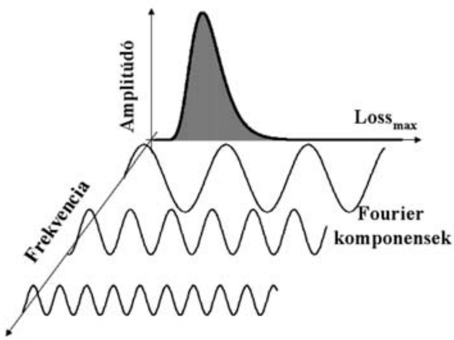
A karakterisztikus függvény



A z jelenti a komplex számsíkot, *Re* a reális részt, *Im* az imaginárius tengelyt. A komplex számsíkon ábrázoltuk a karakterisztikus függvény parametrikus grafikonját, ahol t a paraméter. A pont-szaggatott vonal az egységsugarú kör. Ha egy tetszőleges t pontba húzunk egy komplex vektort (amely a karakterisztikus függvény t-beli abszolút értéke) az a szöget zár be a valós tengellyel. Ezt a vektort w_t körfrekvenciával forgatva egy $|\varphi(t)|$ amplitúdójú és ω_t szögsebességű harmonikus hullámot ír le. Ha sok különböző pontban ezt végrehajtjuk, és a hullámokat összegezzük, akkor előáll a veszteségmegoszlás egy közelítése. Nyilván a közelítés annál pontosabb, minél sűrűbben tesszük ezt meg. A veszteség sűrűségfüggvényének Fourier-komponensekre való felbontását illusztrálja a *4. ábra.*

4. ábra

Veszteségmegoszlás felbontása Fourier-komponensekre



A *3. ábrából* a karakterisztikus függvény három fontos tulajdonsága is leolvasható. Abszolút értéke maximum 1. A $t=0$ esetében értéke 1, míg ha t tart a végtelenhez, akkor a karakterisztikus függvény nullához tart. Ez azt is jelenti, hogy a karakterisztikus függvény segítségével a sűrűségfüggvények végtelenhez közeli tulajdonságai a végesben tanulmányozhatókká válnak, főleg az analízis eszközeivel.

Foglaljuk össze a karakterisztikus függvény főbb tulajdonságait! (C operátor jelentse a konjugált képzést, azaz $C(x+iy)=x-iy$.)

Legyen két X és Y valós független valószínűségi változó $\varphi_X(t)$ *és* $\varphi_Y(t)$ karakterisztikus függvényekkel és a egy tetszőleges valós szám! Ekkor érvényesek a következő összefüggések:

1. $|\varphi_X(t)|=1$
2. $\varphi_X(-t)=C\varphi_X(t)$
3. $\varphi_X+Y(t)=\varphi_X(t)öY(t)$
4. $\varphi_X+a(t)=e^{ita}\varphi_X(t)$
5. $\varphi_{aX}(t)=\varphi_X(at)$.

Szavakkal kifejezve, az első összefüggés azt mondja ki, hogy a karakterisztikus függvény abszolút értéke nem lehet egynél nagyobb. A második tulajdonság: a karakterisztikus függvény negatív t-re megegyezik konjugáltjával, ebből következik az, hogy ha a valószínűségi változó megoszlása szimmetrikus az origóra, akkor a karakterisztikus függvény valós és páros függvénye t-nek. A harmadik tulajdonság: két független valószínűségi változó összegének karakterisztikus függvénye a két véletlen változó karakterisztikus függvényének szorzata. A negyedik tulajdonság: egy valószínűségi változóhoz hozzáadunk egy valós konstanst, akkor ennek a valószínűségi változónak a karakterisztikus függvényét megkapjuk, ha az eredeti változó karakterisztikus függvényét megszorozzuk e^{ita}-val. Végül az ötödik tulajdonság: egy valószínűségi változó a-szorosának karakterisztikus függvényét megkapjuk, ha az eredeti véletlen változó karakterisztikus függvényében a független változót a-szorosára növeljük.

3.2. A valószínűséggeneráló függvény

A veszteségmegoszlás karakterisztikus függvényének előállításához szükségünk lesz a valószínűséggeneráló függvényekre. Ezt a kapcsolatot mutatjuk be.

Legyen X egy nemnegatív diszkrét valószínűségi változó, tehát X a természetes számok halmazán veszi fel értékeit. Ekkor X valószínűséggeneráló függvénye alatt a következőt értjük:

$$P_X(z)=E[z^X].$$

Ez a függvény minden $|z|<1$-re létezik.

$P_X(z)$ ismeretében a megfelelő karakterisztikus függvény könnyen meghatározható a következő összefüggés alapján:

$$\varphi_X(t)=P_X(e^{it}). \tag{1}$$

Ez tehát azt jelenti (például az operációs kockázatoknál), hogy amennyiben ismerjük a veszteségesemények eloszlásának valószínűséggeneráló függvényét, akkor a veszteségmegoszlás karakterisztikus függvényét megkapjuk, ha a valószínűséggeneráló függvénybe behetesítjük a súlyosság sűrűségfüggvényének karakterisztikus függvényét.

3.3. A gyors Fourier- és a gyors inverz Fourier-transzformáció

A gyors Fourier-, illetve inverz Fourier-transzformáció feltételezi, hogy a transzformálandó sűrűségfüggvény diszkrét. Ezért valamilyen módszerrel diszkretizálnunk kell a transzformálandó függvényt. A diszkretizálás hatását a pontosságra – különböző diszkretizálási módszerek felhasználásával – a későbbiekben bemutatjuk.

Feltesszük, hogy a veszteségmegoszlás nullává válik $loss_{max}$ veszteségen túl. Legyen n a mintapontok száma, ahány részre felosztjuk a $[0, loss_{max}]$ intervallumot. Ekkor $\Delta loss=loss_{max}/(n-1)$ egyenlő közű felosztást kapunk, ez $\Delta t=2\pi/(n\Delta loss)$ intervallumot jelent a t tartományban, feltéve, hogy a veszteségeloszlás $loss_{max}$ szerint periodikus függvény *(Singpurwalla* [2006])! Jelöljük t_k-val a $k\Delta t$ értékeket, ha k kisebb, mint $n/2$, különben pedig legyen egyenlő $(k-n/2)\Delta t$-vel, $(k=0,1,\ldots n-1)$, és f_k-val a veszteségeloszlás sűrűségfüggvényét az $f(k\Delta loss)$ helyeken. A Fourier-integrált közelítsük a következő véges összegekkel:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itloss} f(t)dt \approx \Delta loss \sum_{k=0}^{n-1} e^{itk\Delta loss} f(k\Delta loss).$$

Így a karakterisztikus függvény a k-adik helyen

$$\varphi_k = \frac{\Delta loss}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\exp(2\pi i\frac{jk}{n}) f_j .$$

A veszteség sűrűségfüggvénye a j-edik helyen pedig egyenlő

$$f_j = \frac{1}{n\Delta loss}\sum_{k=0}^{n-1}\exp(-2\pi i\frac{jk}{n})\varphi_k .$$

Elvileg így is kiszámíthatnánk a Fourier-transzformáltakat, de ez hosszadalmas számításokat igényelne. A közelítő összegek speciális tulajdonságait kihasználva, a gyors Fourier-, illetve inverz Fourier-transzformáció ezt lényegesen meggyorsítja. A gyors Fourier-transzformáció használatának van egy feltétele: mégpedig az, hogy a felosztást kettő hatványai szerint kell elvégeznünk, azaz $n=2^m$, ahol $m \geq 3$ természetes szám. Ez semmilyen korlátot nem jelent. Hitelezési és piaci kockázatoknál $m \geq 10$ választás megfelelő lehet, így a tartományt *1024* egyenlő veszteségközre osztottuk fel. Amennyiben adott adatpontunk van, és az nem kettőnek hatványa, akkor kiegészítjük az adatsorunkat annyi 0-val, hogy kettő hatványát kapjuk az adatsor számosságára.

A gyors Fourier-transzformáció algoritmusának leírása megtalálható *Bronstejn–Szemengyajev–Musiol–Mühlig* [2000] vagy *Aho–Hoproft–Ulman* [1982] műveiben. Ismertetésétől azért tekintünk el, mert a gyors Fourier-transzformáció elérhető a szokásosan használt statisztikai programcsomagok idősorelemzési moduljaiban, így az alkalmazóknak nem is szükséges ismernie.

A mintapontok számának elvileg olyan kell lennie, hogy a diszkrét („mintavételezett") folytonos veszteségmegoszlást elő lehessen állítani minden pontjában diszkrétizáltjából. A mintavételezés számát az információelméletből származó Shannon-féle mintavételezési tétel alapján kellene megválasztanunk (*Csáki* [1970]). Miután gyakorlatilag nem szükséges a veszteségeloszlást minden pontban ismernünk, ezért előfordulhat, hogy bár a veszteségmegoszlás sima, de az inverz Fourier-transzformáció – a Shannon-tétel következtében – fűrészfogmintát mutat, és az is előfordulhat, hogy kis negatív értékei lehetnek.

A fűrészfogminta megszüntetésére a következő simító eljárás használható (*Reiß* [2003]). Legyen $k=1, 2,\ldots,n-1,$ és interpoláljunk két érték között! Az új érték legyen tehát

$$f^*(k\Delta loss)=0.5[f(k\Delta loss)+f((k-1)\Delta loss)]. \qquad (2)$$

Az f^* az f simított értéke a mintapontokban a $(k-0.5)\Delta loss$ helyeken.

Amennyiben szingularitás is fellép, azaz f_k egyes értékeinél f_k negatív, akkor alkalmazzuk a szingularitást megszüntető algoritmust (Reiß [2003]):

$$k=1, 2,\ldots,n-2 \text{ és } a=max[f((k-1)\Delta loss),0]+max[f((k+1)\Delta loss),0], \qquad (3)$$

$$f((k-1)\Delta loss)=f((k-1)\Delta loss)+\frac{\max[f((k-1)\Delta loss),0]}{a}f(k\Delta loss).$$

$$f((k+1)\Delta loss)=f((k+1)\Delta loss)+\frac{\max[f((k+1)\Delta loss),0]}{a}f(k\Delta loss),$$

$$f(k\Delta loss)=0.$$

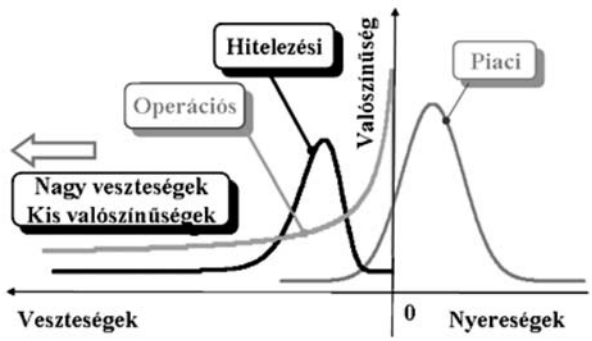
A gyakorlatban első lépésként alkalmazzuk (2)-t, majd (3)-t és újból (2)-t. A mintapontok ezzel $\Delta loss$ nagyságú eltolódást szenvednek.

Eredményül megkapjuk a veszteségmegoszlás egy simított táblázatba foglalt sűrűségfüggvényét.

A fűrészfogminta és a szinguláris értékek akkor is előfordulhatnak, ha a veszteségmegoszlás Dirac-delta jellegű. Gyakorlatilag ez azt jelenti, hogy az eloszlás egyes pontokban nagyon „csúcsos", vagy végtelenbe tart. Ez utóbbi probléma jellemzően az operációs kockázatoknál fordulhat elő, ahogy azt sematikusan szemlélteti az *5. ábra.*[3] Az operációs kockázatok esetében tipikusan a súlyossági eloszlás a nulla környezetében koncentrálódik, nagyon csúcsos, és az eloszlás jobb széle hosszan elnyúló. Ekkor nem tudunk elegendő mintapontot választani, még akkor sem, ha $m=20, 2^{20}=1\ 048\ 576$ értéket választunk!

5. ábra

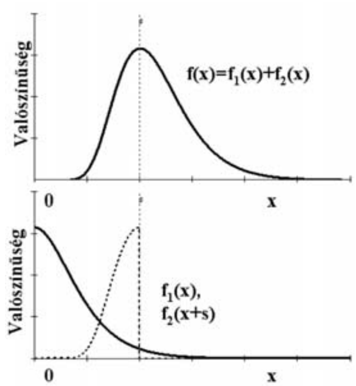
A veszteségeloszlások jellege kockázati típusonként



Ekkor segítségünkre lehet az úgynevezett eltolási tétel (Simonyi–*Zombory* [2000], *Fodor* [1966]). Mivel a Fourier-transzformáció lineáris és homogén, ezért hasonló trükköt használhatunk, mint a rétegezett mintavétel esetében szokás. Felosztjuk a súlyossági megoszlásunkat alkalmasan választott szakaszokra, mondjuk például kettőre s értéknél. A kettéosztott rész összegének tekintjük, azaz legyen $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, ahol az $f_1(x)=f(x)$, ha $x \leq s$, különben 0; és $f_2(x)=0$, ha $x<s$, különben $f(x)$ – ahogy a *6. ábrán* láthatjuk.

6. ábra

Eltolási tétel alkalmazásához



3 Egyes speciális esetekben a működési hiba nyereséget is okozhat. Ezeket a kivételes eseteket az ábrán a működési kockázati veszteségeloszlás sematikus képe nem tükrözi.

Felírhatjuk a következőket:

$$\mathbf{F}f(x) = \mathbf{F}[f_1(x) + f_2(x)] = \mathbf{F}f_1(x) + \mathbf{F}f_2(x) = \mathbf{F}f_1(x) + e^{-ist}\mathbf{F}f_2(x+s).$$

Az eltolási tétel jól alkalmazható azokra az esetekre, amikor jellemző, hogy az eloszlás 0 pont körül koncentrálódik, és az eloszlásszél hosszan elnyúló; így az operációs kockázatok esetében is. Az egyes felosztott szakaszokban, ha szükséges, ugyancsak alkalmasan választott különböző felosztásokat alkalmazunk, majd Fourier-transzformáljuk az egyes szakaszokba eső függvényeket. A nullába tolt részeknél a Fourier-transzformáltakat megszorozzuk e^{-ist}-vel, ahol s mindegyik szakasznál különböző. Az így kapott Fourier-transzformáltakat behelyettesítjük a veszteséggyakorisági valószínűséggeneráló függvénybe, amivel megkapjuk a rész-veszteségmegoszlások karakterisztikus függvényét. Külön-külön inverz transzformáljuk. Az egyes rész-veszteségmegoszlásokat a rájuk érvényes felosztás szerint folytonossá tesszük, majd összegezzük. Ezzel megkapjuk a teljes veszteségeloszlást.

3.4. Inverz Fourier-transzformáció a veszteségmegoszlás karakterisztikus függvényének ismeretében

Végül a veszteség megoszlásának meghatározására bemutatunk egy olyan Fourier-inverz-technikát, amely nem kötődik speciális algoritmushoz – mint a gyors Fourier-transzformáció –, és elvileg a veszteségeloszlást pontosan szolgáltatja a veszteségmegoszlás karakterisztikus függvényének ismeretében. A megközelítés a következő összefüggésen alapul (Reiß [2003]):

Ha $F(x)$ és $G(x)$ két valószínűségi eloszlás, amelyeknek az átlagai ugyanazok, és létezik abszolút momentumuk harmadrendig bezárólag, és Fourier-transzformálhatók, akkor teljesül a következő összefüggés:

$$\widehat{F}(x) = \widehat{G}(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\,\frac{\varphi_f(t) - \varphi_g(t)}{t^2}\,dt \tag{4}$$

ahol $\varphi_f(t)$, illetve $\varphi_g(t)$ az $F(x)$, illetve $G(x)$ eloszlás sűrűségfüggvényének karakterisztikus függvényei, $\widehat{F}(x)$ és $\widehat{G}(x)$ pedig az integrálfüggvényük.

Ahhoz, hogy felhasználhassuk a (4) összefüggést, a veszteségmegoszlás karakterisztikus függvényén túl ismernünk kell a veszteség várható értékét és varianciáját is, amelyeknek a meghatározása nem jelent gondot. Legyen $F(loss)$ a veszteségeloszlás, várható értéke $E[loss]$ és varianciája $var[loss]$! Amennyiben $G(x)$ egy olyan ismert eloszlásfüggvény, amelynek a várható értéke és varianciája megegyezik a veszteségmegoszlás várható értékével, illetve varianciájával, és ismert a karakterisztikus függvénye, akkor a (4) egyenletben az integrál létezik minden t-re korlátos és a $t \to 0$ *esetében is.*

Célszerű választás lehet a gamma-eloszlás azért, mert ennek ismerjük a karakterisztikus függvényét analitikusan, egyébként bármely abszolút integrálható folytonos eloszlásfüggvényt is választhatnánk! A $\Gamma\alpha\beta$ gamma-eloszlás kétparaméteres eloszlás, *ahol az eloszlás* α és β paraméterét azon feltételekkel határozzuk meg, hogy várható értéke és varianaciája egyezzen meg a veszteségeloszlás várható értékével és varianciájával. A gamma-eloszlás karakterisztikus függvénye $\varphi_g(t)=(1-i\beta t)^{-\alpha}$. Paraméterei a veszteségeloszlás várható értékének és varianciájának felhasználásával:

$$\alpha = \frac{E[loss]^2}{\mathrm{var}[loss]} \qquad \text{és} \qquad \beta = \frac{\mathrm{var}[loss]}{E[loss]} \quad .$$

Ekkor a veszteségeloszlás meghatározására a következő összefüggést kapjuk:

$$\widehat{F}(loss) = x\Gamma\left(\alpha, \frac{loss}{\beta}\right) - \alpha\beta\Gamma(\alpha+1, \beta loss) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itloss}\,\frac{\varphi_{Loss}(t) - (1-i\beta t)^{-\alpha}}{t^2}\,dt,$$

ahol $\Gamma(\alpha, loss) = \int_{loss}^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ a nem teljes gamma függvény és $\Gamma(\alpha,0)=\Gamma(\alpha)$.

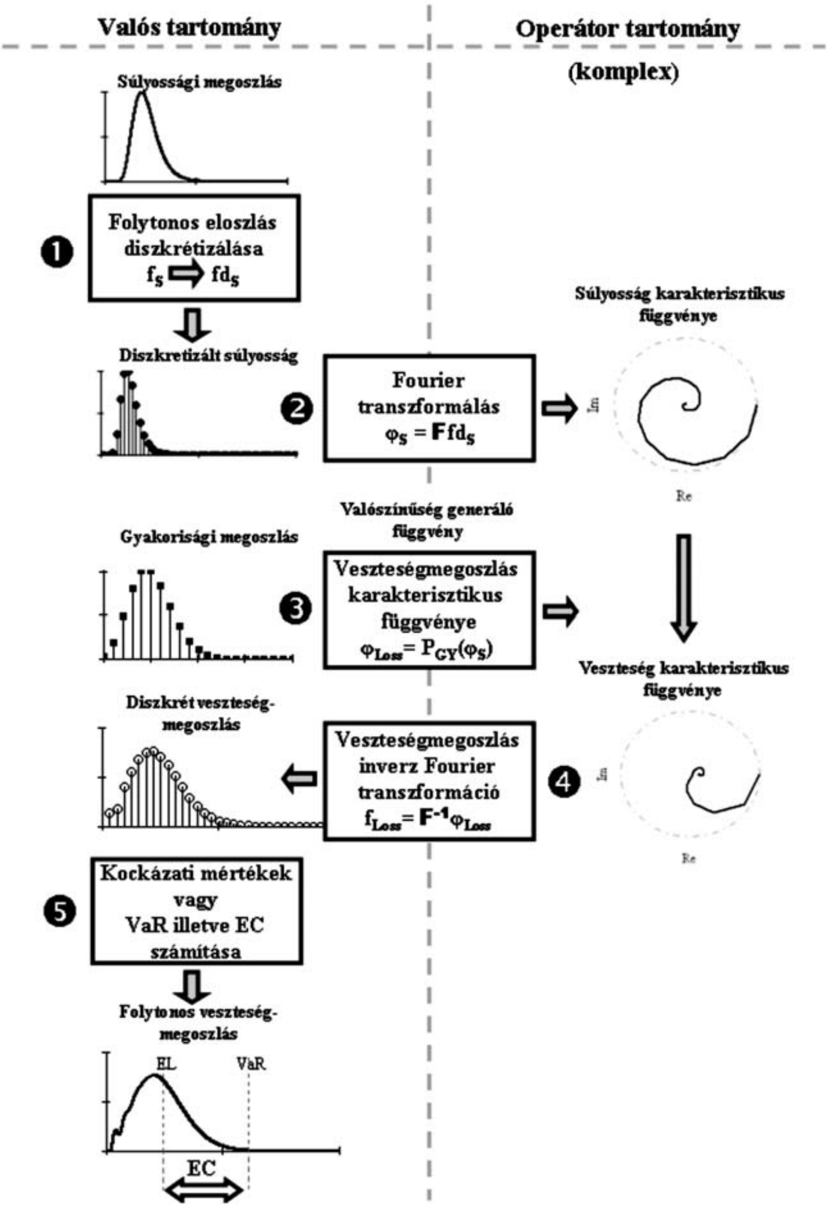
A paraméterek ilyen megválasztása mellett az integrandus $t\to 0$ esetében nullává válik, és t^2 gyorsasággal tart nullává, ha $t\to\pm\infty$-hez. Ezt az integrált kiértékelhetjük valamilyen numerikus integrációs módszerrel, így elegendő kevesebb felosztás alkalmazása, ezáltal a kiszámítási idők csökkenni fognak. Mivel $\hat{F}(loss)$folytonos, kiértékelése numerikusan stabil, még akkor is, ha a veszteségmegoszlás Dirac-delta jellegű!

4. A VESZTESÉGMEGOSZLÁS MEGHATÁROZÁSÁNAK GYAKORLATI LÉPÉSEI

A *7. ábrán* összefoglaltuk a főbb gyakorlati lépéseket, amelyet használnunk kell a legáltalánosabb esetben. Az ábrán az operációs kockázati terminológiát szerepeltetjük, de ugyanúgy használhatnánk a biztosító társaságoknál alkalmazott terminológiát, a kárszámot és kárnagyságot is. Hitelezési kockázatok esetében, ha ismerjük az adósok kockázati paramétereit (*PD, LGD, EAD)*, akkor egyből felírhatjuk a veszteség sűrűségfüggvényének karakterisztikus függvényét. Így ebben az esetben mindjárt a 4. lépéstől indulhatunk (lásd részletesen az 5. pontot).

7. ábra

A veszteségmegoszlás meghatározásának főbb lépései Fourier-, illetve inverz Fourier-transzformációval



(EC=Gazdasági tőke, EL=várható veszteség, VaR=kockáztatott érték)

A *7. ábra* lépései azzal a feltevéssel érvényesek, hogy a veszteségesemény gyakorisága és súlyossága független valószínűségi változók. Az eljárás általánosítható arra az esetre is, amikor ez nem áll fenn, de most ezzel nem foglalkozunk.

Rögtön felmerül egy gyakorlati kérdés: miért is kell átmennünk egy komplex tartományba, mi ennek az értelme? A válasz az, hogy csupán azért, mert a komplex tartományban bizonyos műveleteket könnyebb megtenni, mint a valósban. Ha ez nem állna fenn, akkor nem kellene transzformálgatnunk.

Az eljárás feltételezi a veszteségesemények valószínűséggeneráló függvényének ismeretét. Gyakorlatilag nem kell ezeket nekünk levezetnünk, hanem a megfelelő szakirodalom táblázataiból egyszerűen kiolvassuk. A gyakorisági valószínűséggeneráló függvények diszkrét eloszlások széles osztályára megtalálhatók például *Panjer* [2006] művében. Ugyancsak itt megtalálhatóak a folytonos eloszlások osztályaira az eloszlásokat jellemző értékek, például momentumaik, szórás- és egyéb jellemzőik, amelyeknek ismerete hasznos lehet például a folytonos eloszlások diszkretizálásában.

Operációs kockázatoknál felmerül az a gyakorlati kérdés, hogy mekkora legyen a felosztásnál használt maximális veszteség, azaz a $loss_{max.}$ Erre a következő pragmatikus választ adhatjuk. Közelítsük a veszteségmegoszlást lognormál eloszlással, és valamelyik célszerűen választott felső percentilis alapján számítsuk ki a $loss_{max}$-t ! Legyen μ_{GY} és var_{GY} a gyakorisági eloszlásunk várható értéke és varianciája, míg a súlyossági eloszlásé μ_S, illetve var_S ! A veszteségmegoszlás várható értéke és varianciája pedig μ_{Loss}, var_{Loss}. A veszteségmegoszlás várható értékét és varianciáját kiszámíthatjuk a következő összefüggésekkel (Panjer [2006]):

$$\mu_{Loss} = \mu_{GY}\,\mu_S\,,$$
$$var_{Loss} = \mu_{GY}\,var_S + \mu_S^2 var_{GY}.$$

Ezután kiszámítjuk a veszteségeloszlást közelítő lognormál eloszlás két paraméterét, μ -t és σ-t:

$$\mu = \ln\left(\frac{\mu_{Loss}^2}{\sqrt{\mu_{Loss}^2 + \mathrm{var}_{Loss}}}\right),$$
$$\sigma = \sqrt{\ln\left[\frac{\mathrm{var}_{Loss}}{\mu_{Loss}^2} + 1\right]}.$$

Majd megoldjuk a $percentilis = \Phi\left(\dfrac{\ln(loss_{\max}) - \mu}{\sigma}\right)$ egyenletet (Φ a standard normál eloszlás). Percentilisnek válasszuk a 99,999% értéket! Megjegyezzük, hogy a veszteségeloszlás lognormális eloszlással való közelítésének nincsen elméleti alapja, a gyakorlatban azonban jól használható.

Mivel a gyors Fourier-transzformáció egy diszkrét transzformáció, ezért a folytonos súlyossági sűrűségfüggvényünket diszkrét értékekkel kell közelítenünk a mintapontokban. A diszkretizálási módszerek abban különböznek egymástól, hogy vagy csak a sűrűségfüggvény lokális jellegét őrzik meg, vagy valamilyen globális jellemzőjét is. Tapasztalatok szerint, ha olyan diszkretizálást választunk, amely szerint a diszkrétté tett megoszlás első két momentuma megegyezik a folytonos eloszlás első két momentumával, akkor ugyanolyan számú felosztással lényegesen jobb közelítést kapunk a diszkrét veszteségmegoszlás értékeire. Három diszkretizálási módszert mutatunk be: az úgynevezett kerekítő, az első momentumot megőrző és az első két momentumot megőrző módszert (Panjer [2006]).

A kerekítő módszer jellemzője, hogy a diszkrétté tett eloszlás összege 1-et ad ki, és minden értéke nemnegatív. Az első momentumot megőrző módszer szerint is a diszkrét megoszlás összege 1, nemnegatív, és a diszkrét megoszlás várható értéke megegyezik a folytonos eloszlás várható értékével. Az első két momentumot megőrző módszer esetében a diszkrét megoszlás összege 1, várható értéke és második momentuma megegyezik a folytonos megoszlásával, viszont általában nem biztosítható az, hogy értékei között ne legyenek negatívok. A továbbiakban: F_X az X véletlen változó folytonos eloszlásfüggvénye és f_X a sűrűségfüggvénye, fd_k pedig a diszkrét értéke a k-adik helyen, Δx a felosztás lépésköze.

Kerekítő módszer:

$$fd_0=F_X(0.5\Delta x) \text{ és}$$
$$fd_k=F_X(k\Delta x+0.5\Delta x)-F_X(k\Delta x-0.5\Delta x),\ k=1,\ 2,\ldots.$$

A momentumokat megőrző módszer a Lagrange-féle interpolációs polinomokon alapul. A bizonyítás és egyéb részletek megtalálhatók Panjer [2006] művében.

Az első momentum megőrzése esetén a következőket kell kiszámítanunk:

$$m_0^k=-\frac{1}{\Delta x}\int_{k\Delta x}^{(k+1)\Delta x}\xi f_X(\xi)d\xi+(k+1)\int_{k\Delta x}^{(k+1)\Delta x}f_X(\xi)d\xi,$$
$$m_1^k=\frac{1}{\Delta x}\int_{k\Delta x}^{(k+1)\Delta x}\xi f_X(\xi)d\xi-k\int_{k\Delta x}^{(k+1)\Delta x}f_X(\xi)d\xi.$$

Végül a diszkretizált megoszlás:

$$fd_0=m_0^0,$$
$$fd_k=m_0^{k-1}+m_1^k \qquad k=1,2,....$$

Az első két momentum megőrzésénél pedig

$$m_0^k = \frac{1}{2\Delta x^2}\int_{2k\Delta x}^{(k+2)\Delta x} \xi^2 f_X(\xi)d\xi - \frac{(k+3/2)}{\Delta x}\int_{2k\Delta x}^{(k+2)\Delta x} \xi f_X(\xi)d\xi + \left(\frac{k(k+3)}{2}+1\right)\int_{2k\Delta x}^{(k+2)\Delta x} f_X(\xi)d\xi,$$

$$m_1^k = -\frac{1}{\Delta x^2}\int_{2k\Delta x}^{(k+2)\Delta x} \xi^2 f_X(\xi)d\xi - \frac{2(k+1)}{\Delta x}\int_{2k\Delta x}^{(k+2)\Delta x} \xi f_X(\xi)d\xi - k(k+2)\int_{2k\Delta x}^{(k+2)\Delta x} f_X(\xi)d\xi,$$

$$m_2^k = \frac{1}{2\Delta x^2}\int_{2k\Delta x}^{(k+2)\Delta x} \xi^2 f_X(\xi)d\xi - \frac{1}{\Delta x}\int_{2k\Delta x}^{(k+2)\Delta x} \xi f_X(\xi)d\xi + \frac{k(k+1)}{2}\int_{2k\Delta x}^{(k+2)\Delta x} f_X(\xi)d\xi.$$

A diszkretizált megoszlás értékei:

$$fd_0 = m_0^0,$$
$$fd_1 = m_1^0,$$

ha *k>1* és páros, akkor $fd_k = m_2^{\frac{k}{2}-1} + m_0^{\frac{k}{2}}$, különben $fd_k = m_1^{\frac{k-1}{2}}$ *(k=2, 3,…)*. Az első két momentum megőrzése esetében az integrálási határok *[0, 2Δx], [2Δx, 4Δx]* stb.

A diszkrét veszteségmegoszlás meghatározása után, amikor is tabellázva kapjuk a veszteségeloszlás sűrűségfüggvényét, valamilyen módszerrel (például lineáris interpolációval) meghatározzuk a folytonos veszteségmegoszlást, és ennek ismeretében számíthatjuk a VaR-t valamilyen nemlineáris egyenletmegoldóval, vagy számolhatunk kockázati mértékeket is. A további felhasználásra tehát rendelkezésünkre áll a veszteségeloszlás folytonos függvénye!

Az előzőekben elmondottak illusztrálására és a módszer működésének bemutatására egy számpéldát ismertetünk operációs kockázati megközelítéssel. Olyan példát választottunk, ahol a veszteségeloszlást analitikusan is ismerjük, azért, hogy a számszerű eredmények pontosságáról képet kapjunk. Legyen a folytonos súlyossági eloszlásunk exponenciális *l=10* paraméterrel! A gyakorisági megoszlásunk legyen geometriai eloszlású *b=10* paraméterrel! Ebben az esetben a veszteségeloszlás (Panjer [2006]):

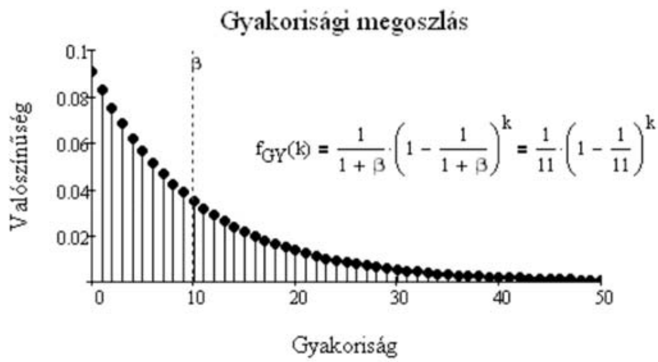
$$F(loss) = 1 - \frac{\beta}{1+\beta}e^{-\frac{loss}{\lambda(1+\beta)}}$$

alakban adható meg.

A gyakorisági megoszlás a *8. ábrán*, a súlyossági eloszlás sűrűségfüggvénye a *9. ábrán* látható.

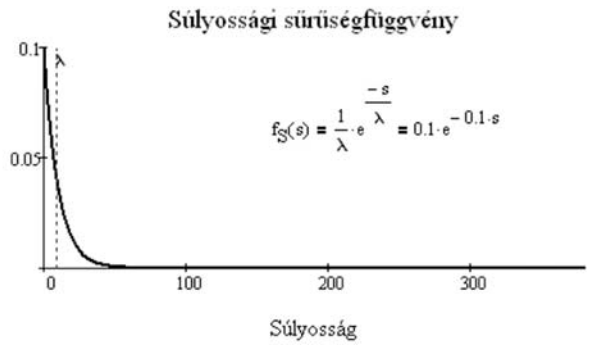
8. ábra

Diszkrét veszteséggyakorisági megoszlás (geometriai)



9. ábra

Folytonos súlyossági megoszlás (exponenciális)



A veszteség maximumát vegyük fel 380-nak. Ez egyben a folytonos súlyossági eloszlás felosztandó intervallumának maximuma. Diszkretizáljuk tehát a folytonos súlyossági megoszlást a [0, 380] intervallumban mindössze 10 szakaszra! A diszkretizálást az előzőekben említett három módszerrel is készítsük el! A diszkrétizált értékek az *1. táblázatban* találhatóak.

1. táblázat

Diszkretizálási módszerek összehasonlítása

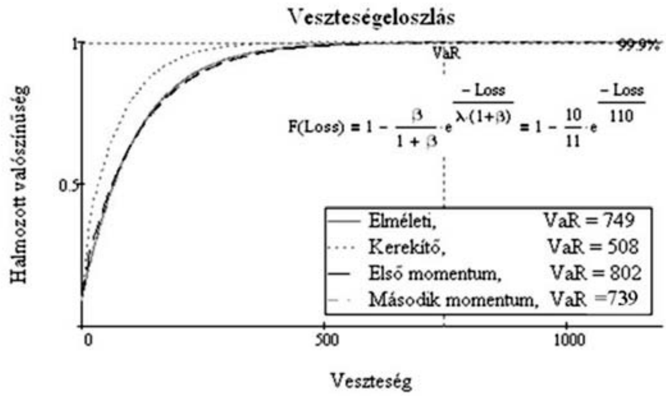
Felosztás	Súlyosság -tól	Súlyosság -ig	Diszkrétizálási módszer: Kerekítő	Első momentum megőrzése	Első két momentum megőrzése
0	0	38	0.850431380777	0.742729150488	0.674414729283
1	38	76	0.146222653765	0.251515502032	0.388144344443
2	76	114	0.003271113628	0.005626595914	-0.062722013341
3	114	152	0.000073177337	0.000125871294	0.000194247394
4	152	190	0.000001637034	0.000002815838	-0.000031389321
5	190	228	0.000000036622	0.000000062992	0.000000097210
6	228	266	0.000000000819	0.000000001409	-0.000000015709
7	266	304	0.000000000018	0.000000000032	0.000000000049
8	304	342	0.000000000000	0.000000000001	-0.000000000008
9	342	380	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
10	380	∞	0.000000000000	0.000000000000	-0.000000000000
Σ			**1.000000000000**	**1.000000000000**	**1.000000000000**
Első momentum			**5.81**	**10.00**	**10.00**
Második momentum			**231.03**	**397.39**	**200.00**
Minimum			**0.000000000000**	**0.000000000000**	**-0.062722013341**

A táblázat alapján megállapítható, hogy az egyes diszkretizált megoszlások valóban teljesítik azokat a tulajdonságokat, amelyeket ismertettünk (az exponenciális eloszlás első momentuma $\lambda=10$, a második momentum $2\lambda^2=200$). Az első két momentum megőrzésénél nem lehetett biztosítani azt, hogy a diszkrét megoszlás minden eleme nemnegatív legyen.

Elvégezve a *7. ábrán* látható lépéseket minden egyes diszkrétizálási módszer szerint, majd folytonossá téve a veszteségmegoszlásokat, felrajzolhatjuk azok grafikonjait, amelyeket a *10. ábrán* tüntettünk fel.

10. ábra

Elméleti és közelítő veszteségeloszlások



Az ábrában szereplő 99,9%-os VaR-értékekből leolvasható, hogy a második momentumig megőrző diszkretizálás már 10 felosztásra közel van az elméletihez! Az egyes módszerek szerint nyert veszteségeloszlások és az elméleti veszteségeloszlás eloszlásfüggvényeinek egyezőségét vizsgálhatjuk a *Kolmogorov–Szmirnov* teszttel (*Vince–Varbanova* [1993]). A tesztek eredményei a *2. táblázatban* találhatók.

2. táblázat

Kolmogorov-Szmirnov-statisztika diszkretizálási módszerek összehasonlítására. Veszteségeloszlások

Elméleti kontra diszkrétizált		Maximális negatív eltérés	Maximális pozitív eltérés	p-szint	Átlag		Szórás		Megfigyelés	
					Elméleti	Diszkrét	Elméleti	Diszkrét	Elméleti	Diszkrét
Elméleti	Kerekítő	-0.310328	0.000000	p<0.001	0.952187	0.970712	0.139840	0.106587	2101	2101
	Első momentum megőrzése	-0.003332	0.071395	p<0.001		0.951333		0.137046		2101
	Első két momentum megőrzése	***-0.017135***	***0.001904***	***p>0.100***		***0.951536***		***0.141929***		2101

Azt tapasztaltuk, hogy a diszkretizálási módszerek tekintetében szignifikáns különbség van az első két momentumot megőrző módszer által szolgáltatott és a többi veszteségeloszlások között. Kevés számú, mindössze 10 felosztást alkalmazva, már nem mutatható ki különbség az elméletitől, gyakorlatilag ugyanaz, míg a másik kettőnél ez nem teljesül. Ebből arra következtethetünk, ha nagyon pontos eredményeket akarunk elérni, használjuk a második momentumig megőrző módszert.

Végül a Fourier-transzformációs eljárás kombinatív és rugalmas tulajdonságának illusztrálására bemutatjuk, hogy hogyan lehet (operációs kockázatoknál) a kis valószínűségű, de nagy veszteséget jelentő események hatását meghatározni, azaz milyen érzékeny erre a VaR vagy a tőkekövetelmény. Ebben az esetben már rendelkezésünkre áll a veszteségeloszlás karakterisztikus függvénye. Most felírjuk a kis valószínűségű, de nagy veszteséget okozó esemény valószínűséggeneráló függvényét. $P(z) = pz^{loss}$, ahol p az esemény bekövetkeztének valószínűsége, *loss* pedig ennek az eseménynek következtében elszenvedhető veszteség. Nem kell mást tennünk, mint ebbe a valószínűséggeneráló függvénybe behelyettesítjük a már rendelkezésünkre álló veszteségmegoszlás karakterisztikus függvényét, és a *7. ábrán* található 4. lépéstől végrehajtjuk az eljárást!

5. Hitelportfóliók veszteségeloszlása és stresszteszt

A módszer rugalmasságának szemléltetése érdekében ebben a pontban nemcsak azt fogjuk bemutatni, hogy a Fourier-transzformációs módszerrel miként határozható meg egy hitelportfólió veszteségmegoszlása, hanem azt is, hogy evvel a módszerrel milyen hatékonyan tudunk stresszteszteket, illetve forgatókönyv-elemzéseket végrehajtani.

Hitelportfóliók esetében a kockázati paraméterek ismeretében (*PD, LGD* és *EAD*) a veszteségmegoszlás $\varphi_{Loss}(t)$ karakterisztikus függvénye közvetlenül felírható: Reiß [2003], CreditRisk+ [1997]. Ezért a *7. ábrán* látható lépések közül az első három elhagyható. Azonnal a komplex tartományból indulhatunk ki, és csak az inverz Fourier-transzformációt kell használnunk.

A hitelportfólió karakterisztikus függvényének meghatározását olyan esetben mutatjuk be, amikor az adósok körében a kockázati paraméterek között nem tételezünk fel semmilyen sztochasztikus kapcsolatot, és a mulasztási eseményeket függetlennek tekintjük egymástól. Időhorizontnak egy évet választunk. Legyen $\mathbf{1}_k$ a k-adik adós indikátorváltozója a mulasztás tekintetében, azaz

$$1_k = \begin{cases} 1, & ha\,k \quad mulaszt, \\ 0, & egyébként. \end{cases}$$

A hitelportfólió várható vesztesége:

$$EL = \sum_{k=1}^{N} 1_k EAD_k LGD_k$$
,

ahol N az adósok száma a portfólióban.

Tehát egy adós mulasztása binomiális eloszlást követ PD paraméterrel. Írjuk fel a binomiális eloszlás valószínűséggeneráló függvényét:

$$P_k(z) = (1 - PD_k)z^0 + PD_k z^{EAD_k LGD_k} = 1 + PD_k(z^{EAD_k LGD_k} - 1) = e^{\ln(1+PD_k(z^{EAD_k LGD_k} - 1))}$$

Amennyiben PD_k kicsi, úgy

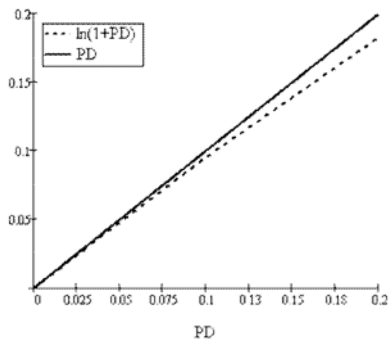
$$\ln(1+PD_k(z^{EAD_k LGD_k}-1)) \approx PD_k(z^{EAD_k LGD_k}-1)$$

.

A közelítés helyességét a *11. ábra* mutatja be. (Itt lényegében a binomiális eloszlásnak Poisson-eloszlással való közelítéséről van szó, amely közelítés kis *PD*-re gyakorlatilag megegyezik a binomiális eloszlás értékeivel (*Feller* [1978]).

11. ábra

ln(1+PD) közelítése PD-vel



Ezzel a *k*-dik adós valószínűséggeneráló függvénye

$$P_k(z) \approx e^{PD_k(z^{EAD_k LGD_k}-1)}$$

Végül feltevésünk értelmében a hitelportfólió veszteségeloszlásának valószínűséggeneráló függvénye az egyes adósok valószínűséggeneráló függvényeinek szorzata:

$$P(z) = \prod_{k=1}^{N} e^{PD_k(z^{EAD_k LGD_k}-1))} = e^{\sum_{k=1}^{N} PD_k(z^{EAD_k LGD_k}-1)}$$

Most alkalmazzuk az (1) összefüggést, és megkapjuk a hitelportfólió veszteségeloszlásának karakterisztikus függvényét:

$$\varphi_{Loss}(t) = e^{\sum_{k=1}^{N} PD_k(e^{iEAD_k LGD_k t}-1)}$$

A hitelportfólióban a maximálisan elszenvedhető veszteség:

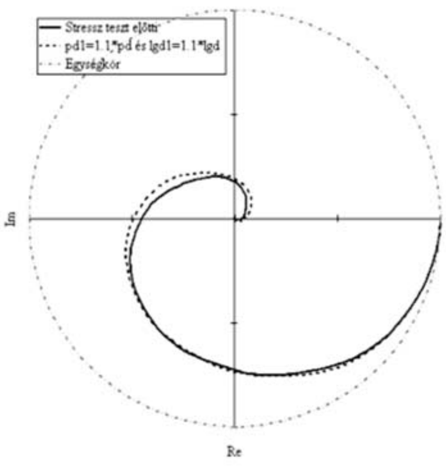
$$loss_{\max} = \sum_{k=1}^{N} EAD_k LGD_k$$

A veszteség felosztását a gyors inverz Fourier-transzformációhoz a [*0, loss*$_{max}$] tartományban kell elvégezni, egyenlő közű intervallumokban. A felosztások száma $n=2^m$, ahol a tapasztalatok szerint $m=10$ körüli választás már kielégítő pontossághoz vezet. A veszteségegység $\Delta loss = \frac{loss_{\max}}{n-1}$. A karakterisztikus függvény egyenlő közű felosztására $\Delta t = \frac{2\pi}{n\Delta loss}$ közű intervallumokat használunk, és $j\Delta t$ helyeken kell kiszámítani $(j=0,1,\ldots,n/2)$. A gyors inverz Fourier-transzformációt alkalmazva megkapjuk a veszteségmegoszlás tabellázott értékeit a $j\Delta loss$ helyeken, amelynek ismeretében bármilyen kockázati mértéket meghatározhatunk, vagy akár a gazdasági tőke nagyságát is.

Numerikus számpéldánkban, amelyet egy banki hitelportfólió alapján készítettünk, bemutatunk egy stressztesztet is, amely feltételezte azt, hogy a *PD*-k 10%-kal és az *LGD*-k is 10%-kal fognak növekedni valamilyen feltételezett gazdasági sokk hatására. Kiszámítjuk a gazdasági tőke %-os megváltozását, azzal a feltételezéssel, hogy a sokk hatását nem tudjuk előre beépíteni a hitelek árába. A 99,95%-os VaR érzékenységét is bemutatjuk. A stressz teszt végrehajtásához nem kell mást tennünk, mint a veszteségeloszlás karakterisztikus függvényében a *PD*-ket, illetve az *LGD*-ket megnövelni 10%-kal. Hasonló egyszerűséggel vizsgálhatnánk azt a hatást is, amely egy vagy több szektort érintene. Ehhez a szektorhoz tartozó adósok *PD*-jét, illetve *LGD*-jét kellene megnövelnünk a sokk hatására. A sort folytathatnánk: csak azt szeretnénk demonstrálni, hogy a Fourier-transzformációs megközelítéssel gyorsan és numerikusan stabil módon tudunk különböző forgatókönyveket végigszámolni, és megvizsgálni hatásaikat a gazdasági tőkére. A szemléltetés kedvéért a *12. ábrán* bemutatjuk a veszteségek karakterisztikus függvényeinek parametrikus grafikonját.

12. ábra

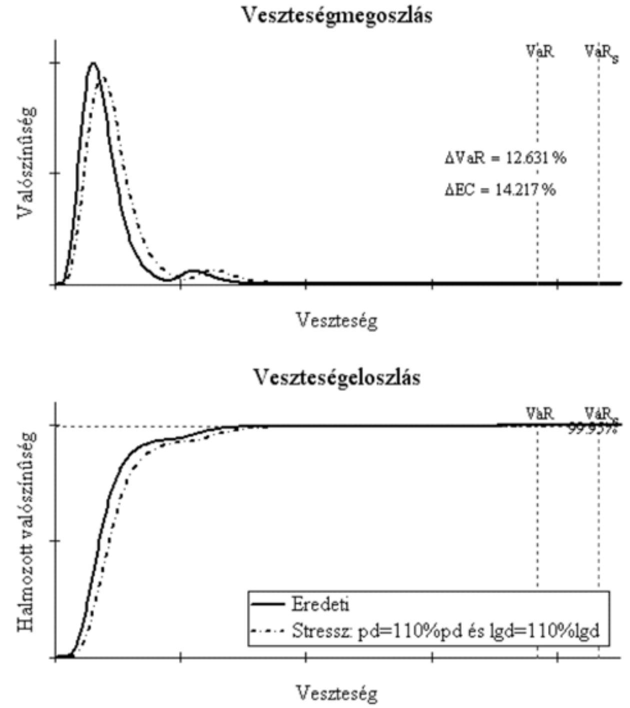
Veszteségmegoszlások karakterisztikus függvényei



A számítások végeredménye, a veszteségmegoszlások és a veszteségeloszlások a *13. ábrán* találhatók.

13. ábra

A VaR és a gazdasági tőke százalékos változásai (EC=gazdasági tőke)



A veszteségmegoszlás második móduszát a nagyobb hitelek koncentrációja okozza. A 99,95%-os VaR mintegy 12,6%-kal növekedett, míg a gazdasági tőke 14,2%-kal.

6. Befejező megjegyzések, következtetések

A veszteségeloszlások meghatározása nagy kihívás. A pénzintézetek belső szükségleteinek kielégítése (teljesítmények mérése), valamint a szabályozói követelményeknek való megfelelés céljából veszteségeloszlásokat nagy számban kell meghatározniuk. Validálásuk miatt pedig képesnek kell lenniük arra, hogy ezt a lehetséges legrövidebb időközönként megismételjék.

Bemutattunk egy rugalmas, kombinatív, numerikusan stabil, nagy porfóliókra is alkalmazható és gyors eljáráscsaládot, amely a karakterisztikus függvények és eloszlásfüggvényeik közötti kölcsönösen egyértelmű kapcsolaton alapul, a nemnegatív diszkrét valószínűségi változók valószínűséggeneráló függvényét, a Fourier-transzformációt alkalmazva.

A módszereket általánosítani lehet azokra az esetekre, amikor a kockázati paraméterek között sztochasztikus kapcsolat van.

Egyéb módszereket nem említettünk, mint például a rekurzív eljárásokon Panjer [2006], integrálegyenleteken Panjer–*Willmot* [1992] munkáin alapuló módszereket. A Fourier-transzformációs módszer konvolúciós tételen alapuló megközelítését sem tárgyaltuk (*Robertson* [1992]). Ezeket az olvasó megtalálhatja a hivatkozott irodalmakban.

A szerző reméli, munkájával talán hozzájárul ahhoz, hogy a magyar pénzintézetek (bankok és biztosítók) hatékonyan és gyorsan határozhassanak meg kockázati mértékeket a veszteségmegoszlások ismeretében. Ezek használatát saját hasznukra a napi döntéselőkészítő és teljesítményeket mérő gyakorlatukká tehetik. Végül megemlítjük, hogy az ismertetett eljárások a közeljövő lehetséges értékpapírosításai során Magyarországon is alkalmazhatóak lesznek.

IRODALOMJEGYZÉK

AHO, A. V.–HOPCROFT, J. E.–ULLMAN, J. D. [1982]: Számítógép-algoritmusok tervezése és analízise. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

BRONSTEJN, I. N.–SZEMENGYAJEV, K. A.–MUSIOL, G.–MÜHLIG, H.: [2000]: Matematikai kézikönyv. TypoTEX Kiadó, Budapest.

COOLEY, J. W.–TUKEY, J. W. [1965]: An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comput*., 19., 90.

CreditRisk+ [1997]: Credit Suisse Financial Product. A credit risk management framework. London, 1997, http://wv.csfb.com/creditrisk.

CSÁKI FRIGYES [1974]: Szabályozások dinamikája. Akadémiai Kiadó, Budapest.

FELLER, W. [1978]: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

FODOR GYÖRGY [1966]: A Laplace–transzformáció műszaki alkalmazásokkal. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

MEDVEGYEV PÉTER [2002]: Valószínűségszámítás. Aula, Budapesti Corvinus Egyetem.

PANJER, HARRY H. [2006]: Operational Risk Modelling Analytics. John Wiley & Sons.

PANJER, HARRY H.–WILLMOT, G. [1992]: Insurance Risk Models. Society of Actuaries, Chicago.

REIB, O. [2003]: Fourier inversion algorithms for generalized CreditRisk+ models and an extension to incorporate market risk. WIAS-Ppreprint No. 817.

RÉNYI ALFRÉD [1968]: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest.

ROBERTSON, J. [1992]: The computation of aggregate loss distribution. Processing of the Casualty Actuarial Society, 79., 57–133. o.

SIMONYI KÁROLY [1998]: A fizika kultúrtörténete. Akadémiai Kiadó, Budapest.

SIMONYI KÁROLY–ZOMBORY LÁSZLÓ [2000]: Elméleti villamosságtan. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

SINGPURWALLA, NOZER D. [2006]: Reliability and Risk. A Bayesian Perspective. John Wiley & Sons.

SZEGÖ, GIORGO (szerk.) [2004]: Risk Measures for the 21st Century. John Wiley & Sons.

VINCE ISTVÁN–VARBANOVA MÁRIA [1993]: Nemparaméteres matematikai statisztika. Elmélet és alkalmazások. Akadémiai Kiadó, Budapest.