2015/3. szám (2. évfolyam): Gazdaság és Pénzügy

A GAZDASÁGI TŐKE AGGREGÁCIÓJA VÁLSÁGFÜGGŐ KORREKCIÓVAL

Madar László – Kocsis Ádám

A tőkekövetelmény aggregációjának egyszerű variancia-kovariancia mátrix alapú megközelítéséhez képest definiálhatóak olyan módszertanok, amelyek figyelembe veszik a mindenkori gazdasági ciklust. Az egyszerű módszertanok hátránya, hogy javarészt a békeidőszakok adataiból merítenek, ám válságidőszakokra túlontúl magas becsléseket adnak. Minthogy hazai porondon az intra-risk korrelációs hatások figyelembe vétele valósítható meg (a nagy kockázattípusok közötti diverzifikációs hatást az MNB nem kívánja elismerni a SREP keretében), így erre a részletre fókuszálunk jelenlegi megközelítésünkben. Elemzésünk egy Markov rezsimváltó modell alkalmazására vezetett, amely szofisztikáltan képes a kockázati aggregáció megvalósítására. A kialakított modellt egy szimulált, ám az egyes intézmények által éves rendszerességű nyilvánosságra hozatali adatai alapján korrigált adatbázison teszteltük.[1]

JEL-kódok: C01, C13, C24, C51, G21, G28

Kulcsszavak: tőkeaggregáció, Markov rezsimváltó modell, hitelkockázat

1. KLASSZIKUS AGGREGÁCIÓ

A kockázatok aggregációja általános vállalati kockázatkezelési probléma. Itt a lényegi kérdés a kockázatok megfelelő mérése és összegzése, hogy a kockázatok kezeléséhez minél relevánsabb adatok álljanak rendelkezésre. A pénzügyi intézményekben az ilyen jellegű megközelítésen túl fontos szerepet kap azonban a tőkeszükségletet csökkentő, diverzifikációs haszon. Ez a haszon nagyban függ a kockázatok mérésétől: az eltérő kockázati aggregációs megközelítések jelentősen eltérő diverzifikációs hasznot idézhetnek elő. Tőkekövetelményről lévén szó, nehezen tesztelhetőek direkt adatok segítségével a különböző módszertani megoldások, így a formalizált levezetés működhet.

A kockázat aggregálásának legegyszerűbb módszerei nem számolnak a kockázati kategóriák között meghúzódó együttmozgásokkal. Idesorolható a szám-

1 A tanulmány az „Innovatív matematikai modellek kutatása a bázeli banki kockázatok mérésére és tőkekövetelmény számszerűsítésére a piaci, működési, likviditási és másodlagos kockázatok területén; valamint pénzügyi termékek áralakulásának viselkedésalapú előrejelzése” című Új Széchenyi Terv keretében finanszírozott kutatásfejlesztés során (PIAC_13-1-2013-0073 számú projekt) valósult meg.

szerűsített tőkekövetelmények egyszerű összeadása, a variancia-kovariancia módszer egy szélsőséges esete, amikor az összes kockázati kategória között 1 a korrelációs együttható. Ez is egyszerűen a kockázati kategóriákra számított tőkeköveteleméyek összegeként állítja elő az aggregált tőkekövetelményt.

A variancia-kovariancia módszer egy általánosan használatban lévő analitikus technika a kockázatok aggregációjára, amely lehetővé teszi, hogy a különböző egyedi veszteségeloszlások összekapcsolhatók legyenek egy közös veszteségeloszlássá. Az egyedüli szükséges tényező a veszteségek függőségi viszonyának mértéke, amelynek szerepét tipikusan a lineáris korrelációs együtthatók mátrixa tölti be. Minél alacsonyabbak a korrelációs együtthatók a mátrix nem diagonális elemeinél, annál nagyobb diverzifikációs hatás érhető el. A legtöbb többdimenziós eloszlás esetén azonban a korrelációs mátrix azzal, hogy egy számban határozza meg a függőségi viszonyt, nem ad elegendően pontos leírást arról, hogy két változó között milyen interakció van.

A módszerben az aggregált kockázat az alábbi képlettel számolható:

$$R = \lambda \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j cov(i,j)}$$

A képlet a klasszikus variancia-kovariancia mátrixot alkalmazza az aggregált kockázat meghatározásához, ahol $cov(i,j)$ a kovarianciamátrixot jelöli, w_i és w_j pedig az egyes elemek egymáshoz viszonyított súlyát.

Mivel a kockázati kitettségek arányskálán mért változók, a lineáris korreláció a legkézenfekvőbb módszer. Ekkor a korrelációs mátrixot a lineáris korrelációs együtthatók alkotják az alábbiak szerint:

$$r(X,Y) = \frac{\sum d_{Xi} d_{Yi}}{\sqrt{\sum d_{Xi}^2 \sum d_{Yi}^2}} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2 \sum (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

ahol $r(X,Y)$ az X és Y kockázati kategória közti korrelációs együttható, d_{Xi} az X kockázati kategória i-edik megfigyelésének eltérése az átlagos értéktől, vagyis $d_{Xi}=(X_i-\bar{X})$. A korrelációs együttható definíciószerűen –1 és 1 közötti értéket vehet fel. –1 értéke a kockázati kategóriák determinisztikus, ellentétes irányú mozgását, +1 értéke determinisztikus, azonos irányú mozgását jelenti.

A módszertan a használt mátrixot jellemzően a teljes elérhető história segítségével határozza meg, amely nem feltétlenül korrekt, mivel amikor a válság bekövetkezik, a korrelációs összefüggések megváltozhatnak. A BIS-nek a stressztesztekről szóló, egyik első anyaga éppen ezen korrelációs hatás változásának felmérését követeli meg.

A tőkekövetelmény-számításra használt variancia-kovariancia módszer top-down megközelítést alkalmaz, azaz a kockázati tőkekövetelményeket külön számszerűsítik, majd a legfelsőbb szinten (pl. hitelkockázatra) aggregálják. A számított tőkekövetelmények egy-egy skalárt jelentenek, az aggregáció nem tesz különbséget a tőkekövetelmény-számítási módszerek között; az IRB és sztenderd portfóliók egy kalapban kezelhetőek. A korrelációs mátrix egy szimmetrikus n × n-es (n a kockázati tényezők száma) pozitív definit mátrix, főátlóját egyesek alkotják, igaz tehát az, hogy $x'Rx > 0$, ha $x \neq 0$.

A variancia-kovariancia módszer használatával aggregált tőkekövetelmény az alábbiak szerint számolható:

$$C_a = \sqrt{C_i^T \times R \times C_i}$$

ahol C_a az aggregált tőkekövetelmény, amely egy számba tömörítve tartalmazza az intra- és az interdiverzifikációs hatásokat egyaránt, C_i pedig az egyes kockázati szegmensekre (portfóliókra vagy minősítési kategóriákra) számolt gazdasági tőkeszükségletek (EC) oszlopvektora, azaz:

$$C_i^T = (EC_1, EC_2, \ldots, EC_n).$$

Elemzésünkben ez egy olyan kiinduló modell, amely a múltat egységesen kezeli, függetlenül attól, hogy válsághelyzetből vagy normál növekvő gazdasági szituációból származnak az adataink. Emiatt problémás lehet egy aggregált tőkekövetelmény-számítás során alkalmazni ezt a módszertant, mivel lehet, hogy épp válság alatt megváltoznak a korrelációs összefüggések. Ezt elemezzük a továbbiakban.

2. AGGREGÁCIÓS MÓDSZERTANFEJLESZTÉSI LEHETŐSÉGEK

Amikor több változó függőségi viszonyának leírását kíséreljük meg, a lineáris korreláció nem mindig megfelelő eszköz az ilyen kapcsolatok megragadásához. Az egyszerű variancia-kovariancia módszertan a lineáris korrelációs koefficiensekből álló korrelációs mátrixot használja az aggregált tőkekövetelmény meghatározásához.

Néhány alternatív megoldást próbáltunk megfogalmazni, amely érintőlegesen megjelent a szakirodalomban, és megpróbálja feloldani az 1. fejezetben bemutatott lineáris összefüggés hátulütőit. Három ilyen módszertan irányába indultunk el: a kopulaalapú aggregációs logikát, a szcenárióalapú értékelést és egy Markov rezsimváltó modell kialakítását vizsgáltuk meg.

A kopulákat azért szokták több paraméter függőségi struktúrájának leírására használni, mert segítségükkel ezen változók együttes eloszlása felbontható a peremeloszlások és az ezek függőségét leíró függvény kombinációjára. Ezt *Sklar* bizonyította be, formálisan:

Ha F egy d dimenziós eloszlásfüggvény $F_1, ..., F_d$ peremeloszlásokkal, akkor létezik olyan C kopula, amelyre $F(x_1,\ldots,x_d) = C(F_1(x_i),\ldots,F_d(x_d))$.

A kopulák segítségével rendkívül rugalmasan lehet együttes eloszlásokat megragadni, hiszen bármilyen peremeloszlás összeköthető bármilyen kopulával, tehát például gaussi kopulát nemcsak gaussi (normális) eloszlású peremeloszlás feltételezésével lehet használni, hanem akár az empirikus eloszlást is használhatjuk peremeloszlásként.

A kopulák alkalmazása során meg kell találni az adathalmazra leginkább illeszkedő típust, illetve meg kell határozni az adott típusú kopula ún. függőséget leíró paramétereit. Van olyan kopula, amely egy, van, amelyik több ilyen paraméterrel rendelkezik. Ezután már csak a függőségi paraméter becslését kell elvégezni, s felállítható a valóságoshoz nagyon hasonló, többdimenziós függőségi struktúra.

A gyakorlatban tipikusan egy paraméterrel rendelkező arkhimédeszi kopulákat alkalmaznak, amelyek egyszerű módon megadhatók. A hitelkockázat területén tipikusan Clayton-kopulát alkalmazhatunk, amely a megugró PD és LGD között vagy az egyes aggregált kockázattípusok között megnövekvő együttmozgást modellezi. Piaci kockázat esetén olyan kopulát érdemes választani, ahol a kopula nagymértékű negatív és a pozitív változás esetén is a korreláció növekedését vetíti előre.

Azzal, hogy a lehetséges jövőbeli világállapotok veszteségei számszerűsíthetőek legyenek, adott események bekövetkezését leíró szcenáriókat aggregálhatunk, így tetszőlegesen meghatározott speciális események is figyelembe vehetők a kockázatok aggregálásakor. Ezt nevezhetjük szcenárióalapú aggregációnak. Ahhoz, hogy ez megfelelő pontosságot adjon, szükség van arra, hogy a lehetséges eseményeket nagy körültekintéssel térképezzük fel, beleértve a kockázati kategóriákban bekövetkező változások együttmozgását, továbbá az egyes szcenáriók bekövetkezésének valószínűségét is relatíve pontosan fel kell mérni. A módszer kulcsa a kockázati kitettségeket befolyásoló faktorok azonosítása. Ha ez megtörtént, az adott szcenárió (faktorváltozás) szimulálható, a kockázati kitettségek pedig számszerűsíthetők, azaz ezzel a módszerrel adott szcenárióhoz meghatározhatók a veszteségeloszlás-függvények.

A szcenárióalapú aggregációs módszer előnye, hogy konzisztens, mivel a kockázati kitettségek adott szcenáriókhoz egyedileg kalkuláltak, és az esetek széles körét figyelembe veszik az aggregálásnál. Ezen túlmenően a módszer arra kényszeríti az intézményt, hogy alaposabban megértse a kockázatokat, valamint az azokat befolyásoló tényezőket. Hátránya a módszertannak, hogy jelentős mértékben feltételezésre építkezik, ennél fogva az eredmények is tartalmazzák a szakértői vélemény hatását, azaz az eredmény függeni fog az értékelést elvégző szakértők mindenkori véleményétől.

A harmadik lehetséges irány a Markov rezsimváltó modellek területére vezet. A historikus tőkekövetelmény-adatok azt mutatják, hogy az intézmények máshogy viselkednek válságperiódus idején, mint normál periódusokban. Ez arra enged következtetni, hogy más összefüggések játszanak szerepet az aggregált tőkekövetelmény meghatározásában, amelyek mindegyike megnőhet válságidőszakban.

A normál időszakokban gyakori, erős diverzifikációs hatás mérséklődhet, és így egy másik aggregációsmodell-összefüggés válhat fontossá. Ennek megfelelően egy köztes aggregációs szint paraméterezése, modellezése lehet arra megoldás, hogyan kell a normál időszakban is felkészülni egy válságidőszak-beli tőkekövetelményre – azaz az intézmény egy korrekt tőkeaggregációs modell segítségével csillapítani tudja az amúgy észlelhető prociklikus hatást a tőkekövetelményében. Ez a leginkább használható és analitikusan becsülhető módszertan, ennek megfelelően ezt elemezzük a továbbiakban.

3. MARKOV REZSIMVÁLTÓ MODELLEK

Ezen modelleket a pénzügyi ökonometria irodalmában széles körben alkalmazták árfolyamok vagy egyes makrogazdasági változók viselkedésének modellezésére. *Engel* (1994) az árfolyamok előrejelezhetőségét vizsgálta ezzel a modelltípussal, és más trendeket állapított meg a gazdaság egyes állapotaira. *Clarida*, *Sarno*, *Taylor* és *Valente* (2003) szintén árfolyam-előrejelzéshez vizsgált meg több modellspecifikációt is, közöttük egy Markov rezsimváltó modellt is. *Frömmel*, *MacDonald*, *Menkhoff* (2005), illetve *Marsh* (2000) cikkéből jól látszik, árfolyam-előrejelzés esetén hogyan specifikálták a Markov rezsimváltó modelleket, hogy a véletlen előrejelzéshez képest némileg szignifikánsabb predikciót tudjanak adni az árfolyamok generális trendjére.

Hamilton (1989) az egyik úttörője volt a rezsimváltó modellek sikeres felhasználásának, makrováltozók analitikus előrejelzésére alkalmazta a módszertant. További makrováltozók predikcióját jól dokumentáló modelleket láthatunk *Blix* (1999), *Kim*, *Morley* és *Piger* (2005) illetve *Li*, *Lin* és *Hsiu-Hua* (2005) esetén.

Ugyanakkor a tőkekövetelmény és a makrogazdasági változók kapcsolatának modellezésében még nem használták fel ezt az eszköztárat. Úgy véljük, különösen a pénzügyi válság tapasztalatainak tükrében sikeres lehet ezt a keretet alkalmazni a tőkekövetelmény aggregációjának modellezésében is. Egyrészt segítségével formalizálható az a plauzibilis feltételezés, hogy egy pénzügyi válság időszakában vagy jelentős piaci turbulenciák, zavarok esetén a banki hitelportfóliók minősége és a makroökonómiai változók közötti kapcsolat más, mint „normál" időszakokban, különösen rövidebb (például havi) frekvencián elemezve. Másrészt a modellkeret viszonylag kevés paraméterrel meg tudja ragadni a kapcsolat nemlinearitását, és nem szükséges kívülről, szakértői becslésként megadni a különböző rezsimek időtartamát.

A Markov rezsimváltó modellek legegyszerűbb esetében a változók közötti kapcsolat két lehetséges állapottal írható le, amelyekből adott valószínűséggel vált a folyamat a másik állapotba. Formalizáltan:

Legyen y_t egy adott idősor, amely alakulása a különböző rezsimekben (s_t=1, 2) az alábbi egyenlettel írható le:

$$y_t = \mu_{s_t} + \sigma_{s_t}\varepsilon_t$$

ahol $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ és

$$\mu_{st} = \beta'_{st} x_t \,.$$

Az s_t egy valószínűségi változó, amely azt jelöli, hogy a folyamat melyik rezsimben van a t időpontban. A Markov rezsimváltó modell esetén feltesszük, hogy az s_t egy kétállapotú Markov-lánc realizációja, ebből következően az alábbi alakban adhatóak meg az s_t alakulását leíró átmenet-valószínűségek:

$$P(s_t = i | s_{t-1} = j, s_{t-2} = k, \dots, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = P(s_t = i | s_{t-1} = j) := p_{ij}.$$

A hibatag normális eloszlásából adódóan az egyes megfigyelések valószínűsége s_t és a t időpontig rendelkezésre álló információk (F_{t-1}) – beleértve a magyarázó változók t. időpontbeli értékét (x_t) is – ismeretében:

$$f(y_t | S_t, S_{t-1}, F_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{s_t}}} exp\left\{-\frac{\left[y_t - \mu_{s_t}\right]^2}{2\sigma^2_{s_t}}\right\}$$

A láncszabály alapján az alábbi formában fejthetjük ki:

$$f(y_t, S_t | F_{t-1}) = f(y_t | S_t, S_{t-1}, F_{t-1}) P(S_t, S_{t-1} | F_{t-1})$$

Ugyancsak a láncszabály és a Markov-tulajdonság alkalmazásával:

$$P(S_t, S_{t-1} | F_{t-1}) = P(S_t | S_{t-1}, F_{t-1}) P(S_{t-1} | F_{t-1}) = P(S_t | S_{t-1}) P(S_{t-1} | F_{t-1}).$$

Ennek alapján a log-likelihood függvény:

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^{T} log\left[\sum_{S_t=0}^{1}\sum_{S_{t-1}=0}^{1} f(y_t | S_t, S_{t-1}, F_{t-1}) P(S_t | S_{t-1}) P(S_{t-1} | F_{t-1})\right]$$

ahol θ a becsülendő paramétervektor, melynek elemei: $\beta_0, \beta_1, \sigma_1, \sigma_2, p_{11}, p_{22}$.

A likelihood-függvény értékének számításához ennek megfelelően szükség van az egyes állapotok feltételes (addig az időpontig rendelkezésre álló információtól függő, adott időpontra vonatkozó valószínűségére ($P(S_{t-1} \mid F_{t-1})$). Ennek meghatározási lépéseit az alábbi többlépéses folyamat mutatja be.

Ismertnek feltételezzük a két induló, minta kezdete előtti állapotvalószínűséget, tetszőleges kezdeti értéket rendelünk hozzá:

$P(S_0 = 1|F_0) = \pi$, és $P(S_0 = 2|F_0) = 1 - \pi$.
Ezt követően minden megfigyeléshez két lépésben meg tudjuk határozni a likelihood-függvényben szereplő valószínűségeket.

Első lépésben a *t*. megfigyelésre vonatkozóan a *t* – 1 időpontig rendelkezésre álló információ alapján számíthatjuk az egyes állapotok valószínűségeit.

Az első megfigyelés esetében az egyes állapotok valószínűsége:

$$P(S_1 = 1, S_0 = 1|F_0) = p_{11}\pi$$
$$P(S_1 = 1, S_0 = 2|F_0) = (1 - p_{22})(1 - \pi)$$
$$P(S_1 = 2, S_0 = 1|F_0) = (1 - p_{11})\pi$$
$$P(S_1 = 2, S_0 = 2|F_0) = p_{22}(1 - \pi)$$

Általánosan, a láncsszabály alkalmazásával a *t*. megfigyelés esetében az egyes állapotok valószínűsége („filtered probabilities”):

$$P(S_t = 1, S_{t-1} = 1|F_{t-1}) = p_{11}P(S_{t-1} = 1|F_{t-1})$$
$$P(S_t = 1, S_{t-1} = 2|F_{t-1}) = (1 - p_{22})(1 - P(S_{t-1} = 1|F_{t-1}))$$
$$P(S_t = 2, S_{t-1} = 1|F_{t-1}) = (1 - p_{11})P(S_{t-1} = 1|F_{t-1})$$
$$P(S_t = 2, S_{t-1} = 2|F_{t-1}) = p_{22}(1 - P(S_{t-1} = 1|F_{t-1}))$$

Második lépésben, a függő változó *t*. időszaki megfigyelésekor (y_t) a beérkező új információ alapján frissíthetjük az egyes állapotok valószínűségeit az adott időszakban (láncszabály és együttes valószínűség tételének alkalmazásával):

$$P(S_t = 1, S_{t-1} = 1|F_t) = P(S_t = 1, S_{t-1} = 1|F_{t-1}, y_t) = \frac{f(S_t = 1, S_{t-1} = 1, y_t|F_{t-1})}{f(y_t|F_{t-1})}$$
$$P(S_t = 1, S_{t-1} = 2|F_t) = P(S_t = 1, S_{t-1} = 2|F_{t-1}, y_t) = \frac{f(S_t = 1, S_{t-1} = 2, y_t|F_{t-1})}{f(y_t|F_{t-1})}$$
$$P(S_t = 2, S_{t-1} = 1|F_t) = P(S_t = 2, S_{t-1} = 1|F_{t-1}, y_t) = \frac{f(S_t = 2, S_{t-1} = 1, y_t|F_{t-1})}{f(y_t|F_{t-1})}$$
$$P(S_t = 2, S_{t-1} = 2|F_t) = P(S_t = 2, S_{t-1} = 2|F_{t-1}, y_t) = \frac{f(S_t = 2, S_{t-1} = 2, y_t|F_{t-1})}{f(y_t|F_{t-1})}$$

ahol

$$f(y_t|F_{t-1}) = f(y_t|S_t = 1, S_{t-1} = 1, F_{t-1})\, P(S_t = 1, S_{t-1} = 1|F_{t-1})$$
$$+ f(y_t|S_t = 1, S_{t-1} = 2, F_{t-1})\, P(S_t = 1, S_{t-1} = 2|F_{t-1})$$
$$+ f(y_t|S_t = 2, S_{t-1} = 1, F_{t-1})\, P(S_t = 2, S_{t-1} = 1|F_{t-1})$$
$$+ f(y_t|S_t = 2, S_{t-1} = 2, F_{t-1})\, P(S_t = 2, S_{t-1} = 2|F_{t-1})$$

és

$$f(y_t|S_t = 1, S_{t-1} = 1, F_{t-1}) = f(y_t|S_t = 1, S_{t-1} = 2, F_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} exp\left\{-\frac{[y_t-\mu_1]^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$f(y_t|S_t = 2, S_{t-1} = 1, F_{t-1}) = f(y_t|S_t = 2, S_{t-1} = 2, F_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} exp\left\{-\frac{[y_t-\mu_2]^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

Ennek alapján számítható az egyes állapotok valószínűsége a *t*. időpontban rendelkezésre álló információk alapján (a teljes valószínűség tételének alkalmazásával), amelyek a $t + 1$ időpontbeli állapotváltozások számításának első lépcsőjében felhasználhatók:

$$P(S_t = 1|F_t) = P(S_t = 1, S_{t-1} = 1|F_t) + P(S_t = 1, S_{t-1} = 2|F_t)$$
$$P(S_t = 2|F_t) = P(S_t = 2, S_{t-1} = 1|F_t) + P(S_t = 2, S_{t-1} = 2|F_t)$$

Ezen lépésekkel sorrendben minden időpontra meghatározhatók a likelihood-függvény értékének számításához szükséges valószínűségek, vagyis adott paraméterek (θ) mellett a likelihood-függvény értéke számítható.

A paraméterek becslése analitikusan, kvázi-maximum likelihood módszerrel, $L(\theta)$maximalizálásával vagy szimulációs technikákkal történhet. Az előbbi esetben minden új θ érték mellett a likelihood-függvény értékének számítása a fent bemutatott lépéseken keresztül frissített valószínűségbecsléssel történik (*Hamilton*, 1993). Az utóbbi esetében a paraméterértékek és az állapotok ismerete melletti feltételes sűrűségfüggvények összegzése történik szimulációs technikákkal, az állapotváltozó lehetséges értékeinek generálásán keresztül (*Das–Yoo*, 2007).

A becsült paraméterek alapján mindkét állapotra számítható az előrejelzés értéke. Az egyes állapotok valószínűségének előrejelzése az előbbi lépésekben, az utolsó mintaelemhez tartozó becsült valószínűségekből kiindulva történik. A becsült érték ($\hat{y}_{t+h}$) ennek alapján a két állapothoz tartozó becsült

$\hat{\mu}_{s1_{t+h}} = \widehat{\beta_1} x_{t+h}$ és $\hat{\mu}_{s2_{t+h}} = \widehat{\beta_2} x_{t+h}$, az állapotvalószínűségekkel súlyozva.

A paraméterek becslése után becsülhető a teljes minta alapján az egyes állapotok adott pillanatbeli valószínűsége $P(S_t = 1|F_T)$, $P(S_t = 2|F_T)$, „smoothed probabilities”).

A markovitás miatt a modellt görgetve lehet előre jelezni, mivel az átmenet-valószínűségek mindig a legutolsó állapottól fognak függeni. Ha adott megfigyelések mellett (*t* hosszú) megbecsültünk egy modellt, akkor a becslés alapján rendelkezésre állnak a t + 1-re vonatkozó átmenet-valószínűségek. Ezeket és a magyarázó változók következő időszakra (t + 1) előre jelzett értékeit felhasználva megbecsülhetjük a következő időszakra a függő változó értékét. Ezután ezt a becsült értéket is a modellhez véve újrabecsüljük azt, így megkapjuk a (t + 2)-re vonatkozó átmenet-valószínűségeket, így előre jelezhetünk t + 2-re is, ha adottak a magyarázó változók megfelelő értékei. Ezt a görgetést kell alkalmazni előrejelzés készítéséhez.

4. PRÓBASZÁMÍTÁSOK ÉS EREDMÉNYEK

4.1. Adatok gyűjtése és előkészítése

A fenti modellt tényleges makroadatokon, illetve az elérhető éves publikált, harmadik pilléres hitelkockázati tőkekövetelményportfólió-adatokon próbáltuk ki, ahol a mögöttes default rátának megfelelő válsághullámot szimuláltunk. Az adatgyűjtésben az alábbi intézmények éves publikus Bázel II. 3. pillér jelentését használtuk fel: Budapest Bank (2008–2013), CIB Bank (2008–2013), Erste Bank (2008–2013), K&H Bank (2008–2013), MKB Bank (2011–2013), OTP Bank (2008–2013), Raiffeisen Bank (2008–2013), UniCredit Bank (2008–2012). Összesen 44 egzakt adatpontunk állt rendelkezésre (publikus adatforrás limitációja) a próbaszámítás elvégzésére, így ezen a területen adatdúsításra szorultunk.

Az adatgyűjtés kiterjedt a banki kockázatok adatbázisának legyűjtésére, illetve a makrováltozók mint magyarázó változók gyűjtésére. Hogy a kockázatok együttmozgását jól lehessen követni, relatív számításokra van szükség, vagy az abszolút összegek trendszűrését kell elvégezni. Az elemzés szempontjából célszerűbb a relatív összegek definiálása, mivel magukat a kockázati értékeket is jellemzően kockázati súlyban (risk weight – RW) definiálják, és utána kalkulálja ki a bank annak abszolút értékét (tőkekövetelmény).

A makrováltozókat 2003 januárjától 2013 év végéig gyűjtöttük össze, havi szinten. Első körben mintegy 71 változó képzése történt meg, ám mivel számos változó nem állt rendelkezésre visszamenőleg elégséges időtávra, így az alábbi változókat használtuk fel a jelenlegi elemzés során: GDP-volumenindex és annak változása, CHF és HUF jegybanki alapkamatszint és annak változása, EUR és CHF devizaárfolyamok és annak változásai, munkanélküliségi ráta és annak változása.

Sajnos, a kapcsolódó adatok rendelkezésre állása nem engedi meg a teljes idősor felhasználását. Mivel a GDP negyedéves intenzitással áll elő, a GDP delta változó 3 havi mozgóátlagát számítottuk ki a végső, havi rendszerességű adatbázisban.

A vizsgált kockázattípusok (hitel-, működési és piaci kockázatok) közül csak a hitelkockázat az, amelynek a segítségével megragadhatóvá válnak a válság bekövetkezésének valószínűségei, és az egyes állapotokat képesek lehetünk megragadni. Bár elemzésünkben megpróbáltuk mind a működési kockázatok alakulására, mind a piaci kockázatok alakulására felírni a rezsimváltó modellt, ezen kockázattípusok esetén azok szintje nem függ a válságtól, legalábbis az elemzésünkben nem volt elkülöníthető a Markov-módszerben egyértelműen egy válságszakasz, illetve egy normál periódus. Ennek megfelelően a hitelkockázatra fókuszáltunk a továbbiakban.

Az egyedi banki éves adatok lebontása (adatdúsítás) szükséges volt, hogy a makrováltozók adatintenzitásához igazodó adatbázist kapjunk. Mivel tényadatok nem álltak rendelkezésre, így szakértői feltételezést kellett bevinnünk a modellbe. Intézményen belül természetesen nincsen akadálya havi tényadatok alkalmazásának.

Meghatározzuk az éves banki értékekből a relatív éves értékeket az alábbi képlet szerint, adott évre és intézményre vonatkozóan:

$$Hitelkockázat:\ R_{hitel,bank} = \frac{Hitelkockázat}{Össz\ hitelállomány}.$$

Az egyes időszaki adatok átlaghoz képest relatív indikátorát kiszámítjuk az egyes évekre.

Azaz formálisan:

$$RI_{k,bank} = \frac{R_{k,bank}}{\sum_{i=1}^{n} R_{k,bank}/n}$$

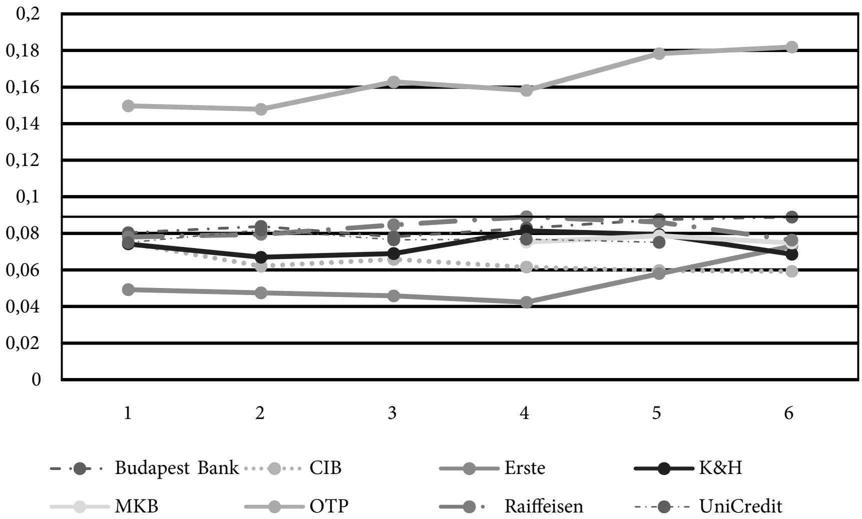
ahol *k* az adott kockázattípus, *i* a rendelkezésre álló évek sorszáma, *n* a rendelkezésre álló évek darabszáma adott bank esetén.

Ahol a fenti képlet nem adna vissza valós értéket (pl. R_k hiányzik), úgy a RI_k helyettesítése 1-gyel történik meg.

A hitelkockázat esetén a válság alapján szimulált hitelkockázati mértéket használtuk, és annak átsúlyozása történt meg, beszorozva a szimulált értéket az adott bankra vonatkozó RI_k értékkel.

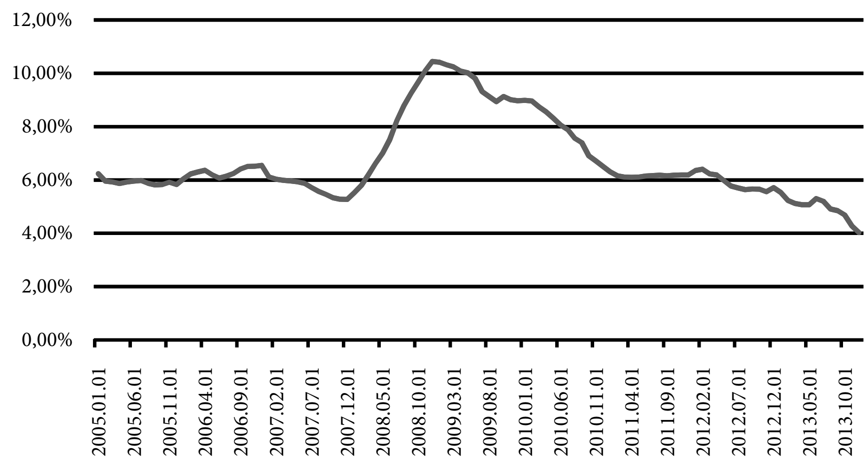
A szimulációra azért volt szükség, mivel a hitelkockázati mértékek nem mutattak különösebb együttmozgást a kockázattal, ezt kellett helyettesíteni egy megfelelően paraméterezett szimulált kockázati lefutással. Az eredeti éves relatív kockázati ábra az alábbi volt:

1. ábra
Egyes bankok relatív hitelkockázata (RI_k)



A szimulált egységes idősor az alábbi volt:

2. ábra
Adatdúsításhoz használt, válságot megtestesítő hitelkockázati mérték



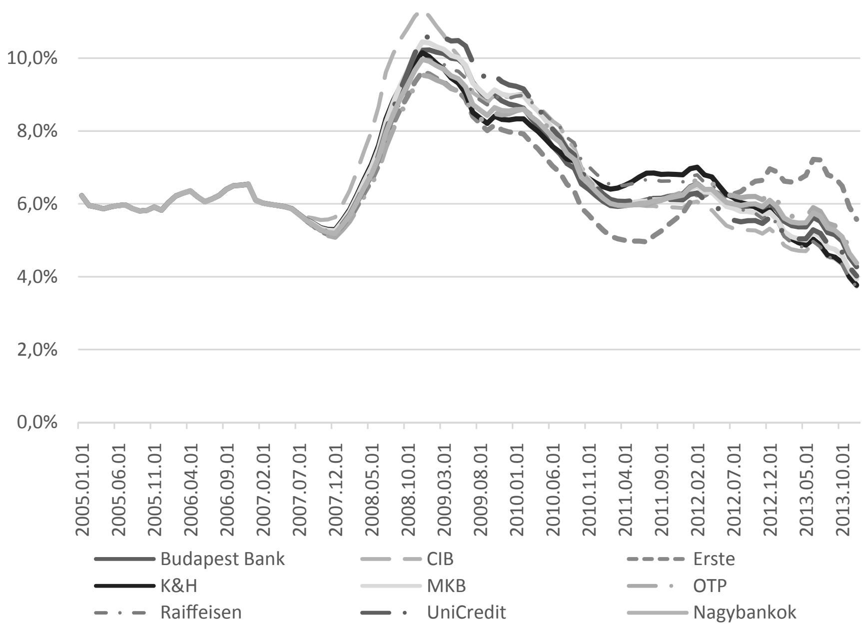
A feltételezett hitelkockázati mérték a válság bekövetkeztekor magasra ugrik, majd ahogy a gazdaság visszatér normál állapotába, visszakúszik normál értékére.

Hogy ne kerüljön sor nagy ugrásra, a lebontás az egyes évek között egy mozgóátlagolást használt, egy adott időszak az aktuális értéket felhasználva még 6 hónapot hátra és 5 hónapot előre tekintve átlagolta ki az éves értékét. Így elkerülhetők azok a nagy ugrások, amelyek enélkül jellemezték az adatbázistáblák összesúlyozását.

Ennek megfelelően csak a hóközi érték (július) kapja meg tisztán az meghatározott éves értékét, a többi időpontban eltérő súllyal a szomszédos év adata is meghatározza a mértékét.

A kapott mozgóátlagot beszorozva a szimulált hitelkockázati értékkel, az egyes bankokra jellemző lefutásokat megkaphatjuk. Az alábbi ábrán lehet ezt bemutatni:

3. ábra
Egyes bankok feltételezett teljes hitelkockázatának alakulása

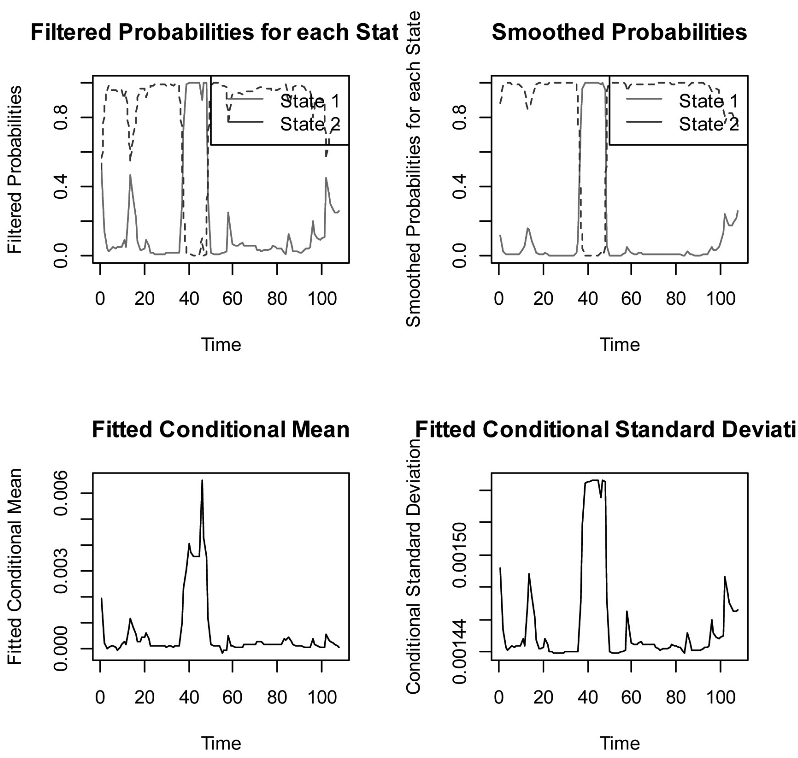


A hitelkockázati lebontás értelmezhető hitelkockázatimérték-alakulást adott valamennyi bank számára. Az Erste lóg ki jobban a sorból. A 2007, illetve az előtti időszakok egységes rátát kapnak az egyes bankoknál, mivel itt csak a makroadatok állnak rendelkezésre, a kockázati adatok nem, mert a nyilvánosságra hozatali jogszabályok, amelyek alapján a bankok ilyen típusú információ közzétételére kötelezettek, 2008-tól van érvényben.

4.2. Modellspecifikáció

Maga a modell a 3. fejezetben bemutatott formalizált specifikációt követte. A becslés végén az alábbi válságperiódus-becsléseket kaptuk:

4. ábra
Markov rezsimváltó modell paraméterezésének eredménye



A fenti modell egy példa a sok lehetséges válságbecslő modell közül. Látható, hogy a modell két világállapot simított valószínűségét adja eredményül, ezt használhatjuk a korrelációs összefüggések pontos becslésére, illetve az előrejelzésre is.

Az egyes kockázati modellek között az volt a döntő, hogy mennyire képesek állapotváltozással megragadni a válság időszakot, mennyire változik a becsült állapottér annak megfelelően, ahogy a bemeneti adatok változnak.

A fenti, delta értékekre futtatott modellek mellett futtattuk ezen modellek abszolút GDP-re történő illesztéseit is, de azok rendre rosszabbul vagy sehogy sem teljesítettek (pl. egyik állapotra becsült kb. 100% a modell minden időszakra).

A fenti, jól teljesítő modellek közül kettőt választottunk ki a további elemzésre szakértői értékelést követően:

– **Jegybanki alapkamat modell**: A modell a jegybanki alapkamat mértékét és ennek változását tartalmazta. Ez volt az egyetlen modell, amely képes úgy megbecsülni az állapotteret, hogy az esetek nagy részében a válságmentes időszakot becsülte, válságidőszakban válságállapotot becsült. Az aggregációs implementáció ez esetben hallatlanul egyszerű, az egyes külön állapotok egyedi aggregációs számításának súlyozását kell elvégezni, beszorozva az állapotvalószínűségekkel, és így megadható a mindenkori korrelációs tábla.
– **GDP-változás és forintalapkamat-változás modell**: Ez a modell az, amely legjobban leírja a célváltozót. Az egyes állapotok esetén a „nyugalmi helyzet"-et azonban a két állapot 50-50%-os aránya jelenti, egyfajta átlagként jellemezhető, így a „normál" állapotbeli értékek ezen súlyarány melletti értékeket kapnak, amelyből számítani kell a nyugalmi időszakhoz tartozó korrelációs értékeket is.

4.3. Előretekintő kockázati becslés

A bemutatott, hónapról hónapra történő lépésenkénti előrebecslést 12 hónapra tettük meg. A modell segítségével extrapoláltuk az ismert adatok alapján a jövőre várható kockázati alakulást (természetesen ceteris paribus, extra sokkhatásoktól mentes alakulásnak lehet ezt tekinteni).

A paraméterezési szakasz 2005 elejétől 2012 végéig tart. Az előrejelző szakaszt elemzésünkben a 2013-as év egésze képezte. A modellstruktúra szerint generálisan a portfóliók javulására, további kockázati csökkenésre lehet számítani, amennyiben nem történik strukturális változás.

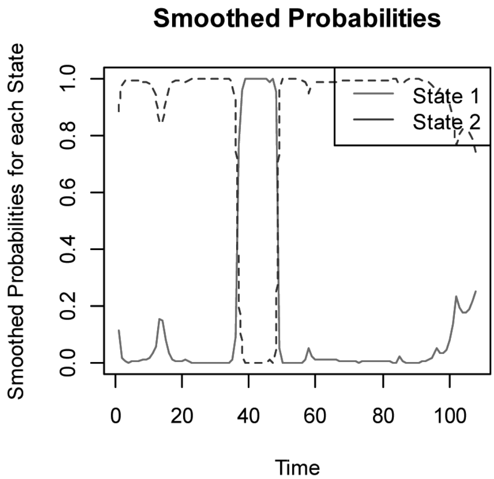
4.4. Kockázati integráció kialakítása a Markov-modellben

A válságbecslés során kapott, simított valószínűségeket nézzük annak érdekében, hogy egyedi kiugrások, outlierek ne vigyék el a válságbecslési folyamatunk eredményeit. Mivel a két modell strukturálisan más közgazdasági tartalmat becsül, így ehhez igazodó határokat kellett megszabni.

A jegybanki alapkamat modell esetén a naturális választást lehet megtenni, azaz az 50%-nál magasabb válságstátuszbecslés jelzi előre a válságidőszakokat. Lássuk ennek a modellnek az ábráját!

5. ábra

Jegybanki alapkamat modell paraméterezése a makroadatokon

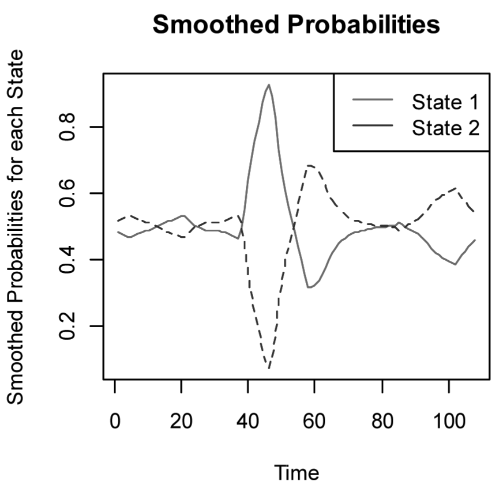


A válságidőszakban a vonal magasan fut, élesen jelzi a rezsimváltást. A modell által becsült, 50%-os State1 simított valószínűséggel rendelkező állapot a 2008. 12. 31.–2008. 12. 31-i szakasz.

Nézzük meg a másik modell végeredményét: a GDP és kamatváltozás eredőjeként miféle modell alakítható ki.

6. ábra

GDP és kamatváltozás modell paraméterezése a makrováltozók alapján



A modell alapján az 50–500%-os tartomány is még bőven a normál periódusokat jelzi előre. Itt egy kb. 60%-os küszöb használata az, amely a folytonos görbe esetén előrejelzi a válságidőszakot, a kockázat növekedésének a valószínűségét. Ebben az állapotban a kockázatok erőteljes növekedésére kell számítani, míg a szaggatott állapotgörbe a kockázatok csökkenését vetíti előre.

A folytonos vonal és a 60%-os küszöbérték által meghatározott válságidőszak szintén 12 hónapos, de időben egy kicsit csúsztatott: 2008. 04. 30.–2009. 03. 31. között valószínűsít emelkedő kockázatokat a második Markov rezsimváltó modell.

A korrelációkat az egyes intézményekre a szimulált portfóliók között meghatározhatjuk, így előállnak a szükséges válság- és nem válságidőszaki korrelációs mátrixok.

A korrelációs eredmények azt mutatják, hogy válság során jelentősen megváltozik a korrelációs szerkezet. Ez azt jelenti, hogy az addigi stabil korrelációs összefüggések módosulnak, rosszabbá válnak, vélelmezhetően magasabb tőkekövetelménnyel járnak. A hatás eltérő az egyes bankoknál.

Az elemzés eredményeképp láthatjuk, hogy a Markov rezsimváltó modell paraméterezésének köszönhetően hogyan lehet meghatározni a korrelációs mátrixokat. A kalkuláció ennek megfelelően arra irányul, hogy ezen különböző mátrixokat az előrebecsült Markov-állapottér-valószínűséggel összesúlyozzuk, és meghatározzuk a következő egy évre vonatkozó, általános effektív korrelációs mátrixot, amellyel meghatározható az egyszerű összeadással szembeni diverzifikációs nyereség összege.

Mivel a normál periódusok korrelációi jellemzően alacsonyabbak, így a Markov rezsimváltó modell eredménye valahol a korrelációs modell és az egyszerű összeadással számító modell közé adja az eredményét.

A korrelációs összefüggések jellemzően stabilak. Pontos banki adatok ismeretében (nem éves intenzitású információkat felhasználva) a modell még pontosabban képes becsülni az egyes összefüggéseket, és korrektebbül képes megragadni a válság mindenkori állapotát, összefüggéseket meghatározni a makrogazdaság helyzetével, valamint pontosabban tudja becsülni a kockázati mértékek jövőbeli alakulását.

A modell hátránya lehet, hogy stabil hitelnyújtási környezetet feltételez, amely nem minden esetben adott, így a rezsimváltó modell „rezsimváltása” is elképzelhető, amennyiben a hitelezési folyamatok nagyobb változást indukálnak. Ez esetben rövidebb időszakon kell a modellt paraméterezni, ám egy válságidőszaknak mindenképpen szerepelnie kell a paraméterezésben, hogy illeszthető legyen az állapottér.

5. A MARKOV-MODELL ÉS AZ ALAPMODELL ÖSSZEVETÉSE

A tőkekövetelmény aggregációjára nem sok modell létezik. Az alapmodellek közül kettőt használnak az intézmények a nyilvánosságra hozatali követelményeik alapján: legtöbben az egyszerű összeadást preferálják, mások a kockázatok stabil összefüggését feltételező variancia-kovariancia alapú összesúlyozást alkalmazzák. A jelenlegi felügyeleti útmutató alapján kockázatok közötti aggregációnál nem vehető figyelembe diverzifikációs hatás, így minden intézmény a kockázatok egyszerű összeadását végzi el.

A variancia-kovariancia modell egyik nagy kritikája, hogy a jellemzően nem válságidőszaki összefüggések jelentősen megváltozhatnak válság során, így válsághelyzetben kisebb mértékben lehet figyelembe venni a kockázatok független mozgásaiból következő diverzifikációs hatást.

Elemzésünk célkeresztjében ez a rész volt, azaz annak a módszertannak a kialakítása, amely a stabilitást elveti, és képes válság- és nem válságállapotokra külön becslést adni, egyúttal a bemeneti paraméterektől függő feltételes kockázati becsléssel számolni.

Az elemzés során kialakítottunk egy állapotfüggő súlyozási logikát, amely adott esetben külön gazdasági állapotokat határoz meg, és az adott input makroparaméterek függvényében képes meghatározni a jövőbeli aggregáció típusát. A historikus adatokból így kétféle korreláció is kinyerhető, és ennek feltételes összegzése adja meg a várható jövőbeli korrelációs mátrixot, amely így a lehető legpontosabban képes az elemi tőkeszámítások eredményeinek aggregálására.

A modell, mivel tőkemodell, azaz a kockázatok egy szélsőséges megnyilvánulását számszerűsíti, közvetlenül nem tesztelhető, nem lehet modellhibákra számszerűsített statisztikai mutatókat létrehozni. Mindenképpen elvi elfogadás szükséges az adott típusú tőkeaggregációs modell elfogadásához.

Az aggregációs logika elvi választástól függően képes egzakt aggregációra, illetve anticiklikus aggregációra is, kutatásunk során ezt a két alkalmazási modellt vizsgáltuk meg.

5.1. Egzakt aggregáció

Ebben a logikában az egyes állapotok tényleges variancia-kovariancia mátrixait használjuk. A jelölésben legyen a normál időszakban mért variancia-kovariancia mátrix, legyen a válságidőszakban mért variancia-kovariancia mátrix.

A Markov rezsimváltó modell alapján a t időszaki becsült válságállapot-valószínűség legyen S_1=1–$S_{0,t}$. A. A becslési időszak legyen T=t_1,t_2…t_n, az előrebecslési periódus legyen $F = t_{n+1}, t_{n+2} \dots t_{n+k}$.

Egzakt aggregációt használva az alábbi lesz az előrebecslésünk folyamata:

$$V_F = \frac{\left(\sum_{j=n+1}^{n+k} S_{v,t}/k\right) \cdot V_v + \left(\sum_{j=n+1}^{n+k}\left(1 - S_{v,t}\right)/k\right) \cdot V_0}{2}$$

Azaz a V_0 és V_v mátrix azonos elemeinek állapotvalószínűséggel súlyozott számtani közepeként kaphatjuk meg a pontos becslét. A módszertan a pontos előrebecslését adja a korrelációs elemeknek, valahol a válságbeli korrelációs szint és a normál korrelációs szint között.

A módszertan eredményéül akkor kapunk magasabb előrebecslést, ha a válság bekövetkezésének valószínűsége magasabb. A becslés így pontos lesz, a mindenkor szükséges tőkekövetelményre illeszkedik a modell.

5.2. Anticiklikus aggregáció

Az egzakt aggregáció prociklikus megközelítésmódot eredményez tőkeoldalon, amely nem kívánt hatás a tőkemeghatározás folyamatában. Ennél fogva javasolt ezt a logikusnak tűnő megközelítésmódot korrigálni.

Még ha egy időben nagyon stabil és jó minőségű rezsimváltó modellt paraméterezünk ki, a pontos előrebecslésből fakadóan, a mindenkori pontos tőkekövetelmény miatt a számított kockázati mérték együtt ingadozhat a válsággal. Mivel feltételezésünk szerint válságban minden kockázattípus megnő, így a korrelációs értékek is megnőnek, alacsonyabb lesz a diverzifikációs hatás, így az eredményül kapott görbék ingadozni fognak. Mivel egy jól paraméterezett makromodell nagyon jó megkülönböztető erővel rendelkezhet, a felölelt kockázati tartomány nagyon szélsőséges lehet, és ennek hatására az előrebecsült átlagos tőkekövetelmény mértéke tág határok között is ingadozhat.

Összességében kimondható, hogy stabil, időszakokon átívelő kockázati mértéket csak egy olyan aggregációs logika adhat, amely időszaktól függetlenül hasonló kockázati szintet képes adni az ügyfélre, az időszaki változások csak kismértékben mozdíthatják el az ügyfél általános kockázati besorolását. Amennyiben az intézmény egy olyan makromodellt és aggregációs rendszert alakít ki, amely érzékenyen reagál a mindenkori kockázati változásokra, rögtön érződni fog a hosszú távú tőkekövetelmény mértékében ennek ellenére is az, hogy a kockázati aggregációs szint változik, és a becsült makroparaméterek hatására a szükséges számított tőkekövetelmény mértéke instabillá válik.

Amennyiben az intézmény pontosan leképezi a hitelkockázati mértékeit, a tényleges veszteségeihez közelítő mértéket kap. Így a tőkekövetelménye prociklikussá válik, és válság idején kiszolgáltatottá teheti az intézményt, mivel annak válságban kell megképeznie az akkor nem éppen olcsónak számító tőkemennyiséget.

Ennél fogva érdemes egy anticiklikus aggregációs logikát kialakítani, amely épp fordítva működik, mint ahogy azt várnánk: válságidőszakban már nem képeztetne külön addicionális tőkekövetelményt, ezzel ellentétben, nem válságidőszak esetén nem engedné meg az alacsony korrelációt, éppen akkor számolna a válságbeli értékekkel. Az aggregációs modell eme verziója mindig ellentétes mozgást vár az aktuális státuszvalószínűségekhez képest, a várható státuszvalószínűségek megfordulását feltételezi. Válságidőszak esetén a következő fellendülést tartja szem előtt, míg normál időszakban pesszimista módon egy váratlan válság bekövetkezését predesztinálja.

Ennek megfelelően az egzakt aggregációhoz képest az alábbi képlet adja meg az aggregáció végeredményét (a jelölések azonosak a két esetben):

$$V_F = \frac{\left(\sum_{j=n+1}^{n+k} S_{v,t}/k\right) \cdot V_0 + \left(\sum_{j=n+1}^{n+k} \left(1 - S_{v,t}\right)/k\right) \cdot V_v}{2}$$

Csak a két *V* variancia-kovariancia mátrix indexe módosult, ennek megfelelően az aggregáció eredménye megfordul és alapvetően anticiklikussá válik: válság esetén a megnövekedő tőkekövetelményhez és kockázathoz engedékenyebb aggregációs logikát párosít, normál periódusokban pedig nem enged olyan nagy diverzifikációs hatást figyelembe venni; felkészíti a bankot a válságra egy kicsit magasabb tőkekövetelmény-mértékkel.

6. KÖVETKEZTETÉS

Az egyszerű, historikus átlagot használó modellek, mint a tőkeértékek összeadása, túlontúl konzervatív megközelítést jelentenek a tőke előrejelzésével, aggregálásával kapcsolatban. Ezzel ellentétben a teljes diverzifikációt figyelembe vevő modellek nagyon lazák, a kockázatok túlzott csökkentését teszik lehetővé, amelyek a modellen kívüli add-onokkal kezelhet le a bank.

Az elemzésünk során kifejlesztett modell a tőkekövetelmény viszonylag pontos előrebecslését teszi lehetővé egy kifinomult módszertan segítségével. A módszertan paraméterezésénél szükséges az, hogy a modellező gondolkodjon, a válság-előrejelzés paramétereit úgy válassza meg, hogy az ténylegesen működjön.

A végeredmény azonban eléggé közel lesz a tényleges szükséges tőkemértékhez, amennyiben ezt a modellt választja a bank. Lehetőség nyílik a válság egyfajta kezelésére is: előre fel lehet készülni a krízishelyzetekre, amennyiben egy bank az anticiklikus modellt használja fel.

A módszertan egyfajta konzervatív megközelítése a kovarianciamódszernek, annál sokkal indokolhatóbb végeredménnyel.

IRODALOMJEGYZÉK

Basel Committee on Banking Supervision (2010): Developments in Modelling Risk Aggregation. Joint Forum.

Blix, Mårten (1999): Forecasting Swedish Inflation With a Markov Switching VAR, Working Paper Series 76, Sveriges Riksbank (Central Bank of Sweden).

Clarida, Richard H. – Sarnoc, Lucio – Taylor, Mark P. – Valente, Giorgio (2003): The out-of-sample success of term structure models as exchange rate predictors: a step beyond. *Journal of International Economics* 60, pp. 61–83.

Das, Dhiman – Yoo, B. Hark (2004): A Bayesian MCMC Algorithm for Markov Switching GARCH models, Econometric Society 2004 Far Eastern Meetings 451.

Engel, Charles (1994): Can the Markov Switching Model Forecast Exchange Rates?, *Journal of International Economics* 36, pp. 151–165.

Frömmel, Michael – MacDonald, Ronald – Menkhoff, Lukas (2005): Markov switching regimes in a monetary exchange rate model. Diskussionspapiere der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät, Universität Hannover, No. 266.

Hamilton, James D. (1989): A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, Vol. 57, No. 2, pp. 357–384.

Kim, Chang-Jin – Morley, James – Piger, Jeremy (2005): Nonlinearity and the permanent effects of recessions. *Journal of Applied Econometrics*, 2005, 20(2), pp. 291–309.

Marsh, Ian W. (2000): High-frequency Markov Switching Models in the Foreign Exchange Market. *Journal of Forecasting* 19, pp. 123–134.

McNeil, Alexander J. – Frey, Rüdiger – Embrechts, Paul (2005): Quantitative Risk Management. Princeton Series in Finance.

Ming-Yuan, L. L. – Hsiou-Wei,. W. L. – Hsiu-Hua, R. (2005): The performance of the Markov-switching model on business cycle identification revisited. *Applied Economics Letters* 12, pp. 513–520.

Uryasev, Stan – Theiler, Ursula – Serraino, Gaia (2010): Risk-return optimization with different risk-aggregation strategies. *The Journal of Risk Finance*, Vol. 11(2), pp.129–146.

Stanca, Luca (1999): Asymmetries and nonlinearities in Italian macroeconomic fluctuations. *Applied Economics*, Volume 31(4), pp. 483–491.