



MAKARA TAMÁS

# MAXIMUM ÉS MINIMUM ÁRFOLYAMOK IDŐBELI ELOSZLÁSA

A cikkben olyan empirikus eredményeket mutatok be, amelyek a napon belüli legmagasabb és legalacsonyabb árfolyamok időbeli eloszlását írják le a Nasdaq 100 részvényindex napon belüli adatsora alapján. Megvizsgálom, hogy ezek az eredmények összhangban vannak-e a részvényárfolyamok alakulását modellező geometriai Brown-mozgással, ha a heteroszkedaszticitást is figyelembe vesszük. Egy érdekes különbséget is leírok a legmagasabb és a legalacsonyabb árfolyamok eloszlásai között.

## BEVEZETÉS

A pénzügyi szakirodalomban rengeteg empirikus kutatás foglalkozott a pénzügyi árfolyamsorokból számított hozamok által követett sztochasztikus folyamatokkal és az árfolyamok volatilitásával. Ez az írás az árfolyam-alakulás egy eddig kevesebb figyelmet kapott jellemzőjével foglalkozik: azzal, hogy mikor (hány órákor) éri el az árfolyam a kereskedési nap legmagasabb, illetve legalacsonyabb árfolyamát.

A cikk első részében a Nasdaq 100 részvényindex napi minimum és maximum árfolyamai időbeli eloszlását bemutató empirikus vizsgálatot ismertetem. A tapasztalat azt mutatja, hogy a minimum, illetve maximum árfolyamok időbeli eloszlása U alakú hisztogrammal írható le: jóval gyakrabban fordul elő, hogy a na-

pi maximum, illetve minimum a kereskedési idő elején vagy végén következik be, mint az, hogy a kereskedési nap közepén.

A második részben azt vizsgálom, hogy az empirikus tapasztalatok mennyire vannak összhangban az árfolyammozgás Black–Scholes-féle modelljével, a geometriai Brown-mozgással. E célból Monte Carlo szimulációt végeztem, melynek eredménye azt mutatja, hogy a hagyományos, konstans volatilitást feltételező geometriai Brown-mozgás esetében is U alakú a napi minimum és maximum árfolyamok időbeli eloszlását jellemző hisztogram. Emellett azonban jelentős eltérés is mutatkozott az empirikus eredményekhez képest: a Monte Carlo szimuláció esetében jóval kevésbé koncentráltak a minimum, illetve maximum árfolyamok időpontjai a kereskedési idő

elejére és végére, mint az empirikus eredmények esetében. Ez a különbség azonban eltűnt, amikor a geometriai Brown-mozgás általánosított, a volatilitás időbeli változását is figyelembe vevő modellje alapján végeztem Monte Carlo szimulációt.

A cikk harmadik része az empirikus eredmények azon sajátosságaival foglalkozik, amelyek nem magyarázhatóak a hatékony piacot és a véletlen bolyongást feltételező egyszerű modellek mellett. Az empirikus eredmények azt mutatják, hogy lényegesen gyakrabban fordul elő, hogy a napi maximum árfolyam időben előbb következik be a napi minimum árfolyamnál, mint fordítva. Ezen aszimmetria következtében megmutatható, hogy egy nagyon egyszerű napon belüli kereskedési stratégiával a vizsgált hatéves időszakban tartósan jobb eredményt érhetnek volna el a befektetők, mint a „vedd és ülj rajta” stratégiával. Ez egy potenciális anomália, amely első látásra ellentmond a piaci hatékonyság hipotézisnek, ezért további kutatást igényel.

#### EMPIRIKUS EREDMÉNYEK

A napi maximum és minimum árfolyamok alakulásának empirikus vizsgálatát a Nasdaq 100 index 1997. 04. 07-től 2003. 07. 11-ig tartó időszakra vonatkozó árfolyamadatai alapján végeztem. A Nasdaq 100 index a 100 legnagyobb, tevékenységét tekintve nem a pénzügyi szférába tartozó, az amerikai tőzsdén kívüli piacon jegyzett vállalat részvényeiből képzett kapitalizáció alapján súlyozott tőzsdeindex. A nagy amerikai tőzsdeindexek kö-

zül ez a legalkalmasabb a napon belüli árfolyam-alakulás vizsgálatára, mert nem tartalmaz tőzsdén jegyzett papírokat, és likvid részvényekből áll, amelyekben folyamatos a kereskedés. A tőzsdén jegyzett papírokat tartalmazó indexek azért nem megfelelőek a vizsgálatunk szempontjából, mert a tőzsdei papírok kereskedésének megnyitása a specialista rendszerben gyakran elhúzódik, ezért a kereskedési nap elején a tőzsdén jegyzett papírok jó része esetében nem a tényleges piaci árfolyam szerepel a tőzsdeindexben, hanem az előző napi záró árfolyam.

Az adott időszakra rendelkezésre áll a Nasdaq 100 index nyitó, maximum, minimum és záró árfolyama a kereskedési idő 30 perc hosszúságú intervallumaira.<sup>1</sup> Mivel a kereskedési idő hossza hat és fél óra (9.30-tól 16.00-ig), minden kereskedési naphoz 13 harmincperces intervallum tartozik. Kihagyva a rövidített kereskedési napokat és néhány hibás rekordot, összesen 1556 kereskedési nap adatai állnak rendelkezésre.

Az 1. ábra a Nasdaq 100 index alakulását mutatja a vizsgált hatéves időszakban. A vizsgált időszak első fele egy történelmi szemmel szinte példátlan bikapiac, az időszak második fele egy rendkívüli medvepiac.

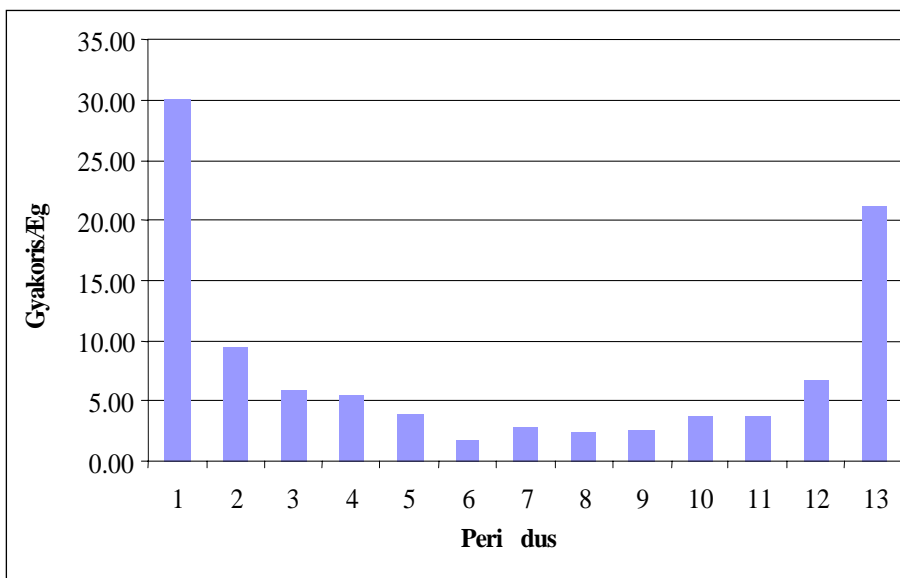
A rendelkezésre álló adatokból általában egyértelműen eldönthető, hogy az adott kereskedési napon a maximum, illetve a minimum árfolyamok a kereskedési idő melyik félórájába estek. (Volt hat nap, amikor ez nem volt egyértelműen eldönthető, mert a napi maximum/mini-

1 Forrás: Quote.com.

1. ábra

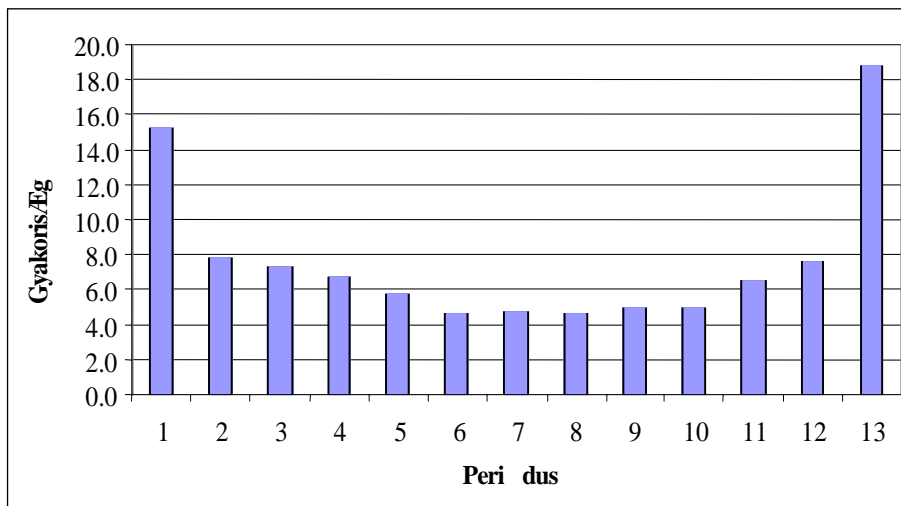
**A Nasdaq 100 index alakulása**

2. ábra

**A napi maximum árfolyamok empirikus eloszlása**

3. ábra

## A napi minimum árfolyamok empirikus eloszlása



1. táblázat

## A minimum és maximum árfolyamok empirikus eloszlása

Periódus	Maximum	Minimum
1	30.1	15.3
2	9.6	7.8
3	6.0	7.4
4	5.5	6.8
5	3.9	5.7
6	1.9	4.7
7	2.8	4.8
8	2.4	4.7
9	2.6	5.0
10	3.9	5.0
11	3.8	6.6
12	6.9	7.6
13	21.2	18.8

mum egynél több félórás időszak maximum/minimum árfolyamával esett egybe. Ezeket a napokat nem hagytam ki a vizs-

gálatból, hanem mindkét napon belüli maximum/minimum árfolyamot figyelembe vettem a gyakoriság vizsgálatánál.)

A 2. ábra azt mutatja, hogy a napi maximum árfolyamok az esetek hány százalékában estek a kereskedési nap megfelelő félórájába, a 3. ábrán pedig azt követhetjük nyomon, hogy a napi minimum árfolyamok az esetek hány százalékában estek a kereskedési idő megfelelő félórájába. Az 1. táblázat ezeket az adatokat numerikusan mutatja be. Jól látható, hogy a napi szélsőértékeket jellemzően a kereskedési idő elején vagy a végén éri el az árfolyam, és csak ritkábban a kereskedési idő közepén.

Hasonló jellegű vizsgálatokkal nem tállkoztam a pénzügyi szakirodalomban, de találtam egy hasonló vizsgálatot Kaufman technikai elemzéssel foglalkozó könyvében.<sup>2</sup> Kaufman különböző futures piacokat vizsgált a 90-es évek első felében, és hasonló empirikus eredményekre jutott (azaz a napi csúcsok a kereskedési idő elején és végén koncentráálódtak). Kaufman további vizsgálat nélkül feltételezte, hogy ez a profitábilis napon belüli kereskedéshez felhasználható információ.

#### A MINIMUM ÉS MAXIMUM ÁRFOLYAMOK ELOSZLÁSA GEOMETRIAI BROWN-MOZGÁS ESETÉN

A legtöbb ember, akit kérdeztem, hozzám hasonlóan első pillantásra úgy vélte, hogy az előző részben bemutatott empirikus eredmények nem férnek össze a geometriai Brown-mozgást feltételező árfolyam-

modellekkel.<sup>3</sup> Intuitív alapon úgy véltem, egy véletlen bolyongás esetében (ha nincs jelentős napon belüli trend), ugyanakkora eséllyel esnek a napi csúcspontok, illetve mélypontok valamennyi intervallumba. Intuíciónkat ellenőrizendő Monte Carlo vizsgálatot végeztem, hogy megvizsgáljam a napi csúcspontok és mélypontok időbeli eloszlását a geometriai Brown-mozgás mellett.

Az első kísérlet során azt tételeztem fel, hogy az árfolyam alakulása napon belül az alábbi Ito folyamatot követi:

$$\frac{dS}{S} = \alpha dt + \sigma dz,$$

ahol  $S$  a részvényárfolyamot,  $\sigma$  a volatilitást,  $z$  pedig egy Wiener-folyamatot jelöl. Azzal a gyakori feltételezéssel éltem, hogy ha napon belül nulla driftet tételezünk fel, nem járunk nagyon messze az igazságtól.

A Monte Carlo szimulációt a következőképpen végeztem. Minden szimulált kereskedési nap 390 percnyi kereskedési idejére 780, egymást 30 másodpercenként követő árfolyamot generáltam, majd meghatároztam, hogy a kereskedés hányadik félórájába esett a napi maximum, illetve a napi minimum árfolyam. Összesen 5000 kereskedési napot generáltam. A napi maximumok és minimumok eloszlását a 2. táblázat tartalmazza.

Az eredmény markánsan U alakú hisztogram, amely viszonylag jól közelíti a napi mélypontok empirikus eloszlását, ugyanakkor lényegesen kevésbé koncent-

2 Perry J. Kaufman, *Trading Systems and Methods*, Wiley, 1998.

3 Lásd például: Száz János, *Tőzsdei opciók vételre és eladásra*, Tanszék Kft., 1999.

2. táblázat

**A maximum és minimum árfolyamok szimulált eloszlása  
(konstans volatilitást feltételezve)**

Periódus	Maximum	Minimum
1	17.8	20.0
2	7.7	7.7
3	6.1	6.2
4	5.2	5.6
5	5.8	4.6
6	4.8	5.0
7	4.9	5.5
8	5.0	4.9
9	5.0	5.3
10	5.3	5.7
11	5.8	6.9
12	8.3	7.2
13	18.1	15.4

rálódik a kereskedési idő elejére, mint a napi maximumok empirikus eloszlása.

A második kísérletben figyelembe vetttem, hogy a tapasztalat szerint napon belül az árfolyam volatilitása nem konstans. Itt a következő modellel dolgoztam: az  $i$ -edik félórás periódusban az árfolyam alakulását a következő Ito folyamat írja le:

$$\frac{dS}{S} = \sigma dz + \alpha \lambda_i dz,$$

ahol a  $\lambda_i$  skalárok periódusonként eltérnek.

A  $\lambda_i$  értékeket a Nasdaq 100 index empirikus adataiból becsültem, úgy normalizálva, hogy  $\lambda_1$  értéke 1 legyen:

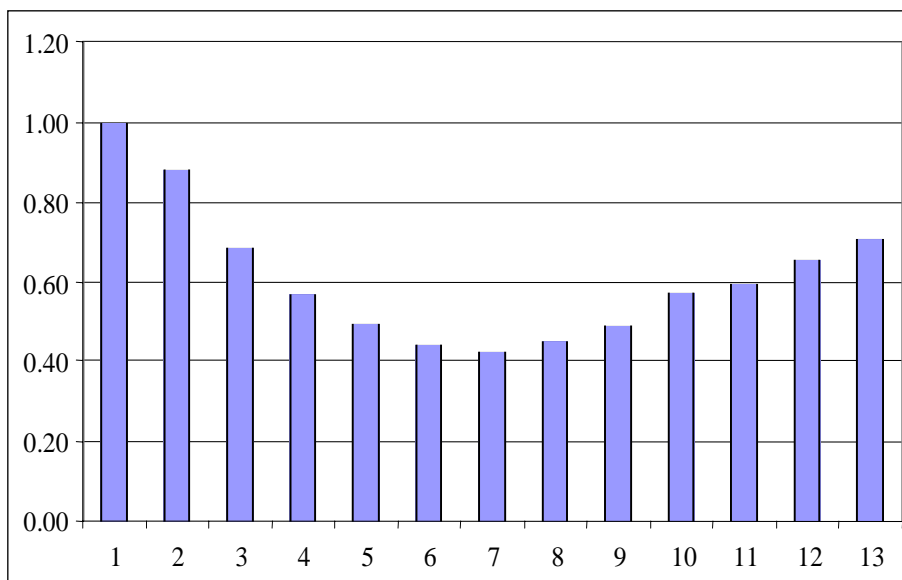
$$\lambda_i = \frac{\sum_{j=1}^i \frac{\ln(h_{j,t} - l_{j,t})}{\ln(h_{j,t} - l_{j,t})}}{n},$$

ahol  $n = 1556$ , a megfigyelt kereskedési napok száma,  $h_{ji}$  a  $j$ -edik kereskedési nap  $i$ -edik félórájának maximum árfolyama,  $l_{ji}$  pedig a  $j$ -edik kereskedési nap  $i$ -edik félórájának minimum árfolyama. A becsült  $\lambda_i$  értékeket a 4. ábra mutatja. Jól látható, hogy a volatilitás a nap elején a legnagyobb, majd ebédidő végéig folyamatosan csökken, ezután ismét növekedni kezd és a nap végéig folyamatosan növekszik.

A második kísérletben a fenti feltevések alapján szintén 5000 kereskedési nap szimulált árfolyam-alakulását generáltam. A 3. táblázat a szimulált maximum és minimum árfolyamok eloszlását foglalja össze.

A szimulált eredmények ebben az esetben a napi maximumok empirikus eloszlásához állnak közel: a konstans volatilitással szimulált eredményekhez képest

4. ábra

A napon belüli volatilitást jellemző  $\lambda_i$  értékek

3. táblázat

A maximum és minimum árfolyamok szimulált eloszlása  
(változó volatilitást feltételezve)

Periódus	Maximum	Minimum
1	34.5	39.1
2	8.9	8.7
3	5.1	5.6
4	3.6	3.4
5	2.3	2.1
6	0.9	1.0
7	4.8	5.1
8	3.6	3.7
9	1.4	1.0
10	2.0	1.9
11	6.2	5.9
12	7.2	7.2
13	19.5	15.3



többször van szélsőérték a nap elején, és kevesebbszer a nap közepén.

A fenti eredmények nem azt igazolják, hogy az árfolyam-alakulás geometriai Brown-mozgást követ, mindössze annyit állíthatunk, hogy az a tény, hogy a napi maximumok és minimumok időbeli eloszlása U alakú, nem zárja ki, hogy az árfolyam geometriai Brown-mozgás szerint alakuljon. Ebből az is következik, hogy önmagában arra a tényre, hogy a napi maximumok és minimumok időbeli eloszlása U alakú, nem lehet nyereséges napon belüli kereskedési stratégiát alapozni, hiszen ez egy nulla várható értékű véletlen bolyongás esetében is igaz.

#### EGY ÉRDEKES ANOMÁLIA

Az empirikus eloszlások egyik feltűnő jellegzetessége, hogy a napi maximumok eloszlása jelentősen eltér a minimumok eloszlásától. A napi maximumok sokkal nagyobb hányada van a kereskedés elején, mint a minimumok esetében. Ez a jelenség teljesen konzisztensen, minden egyes évben megfigyelhető, függetlenül attól, hogy bikapiac vagy medvepiac volt. A 4. táblázat évekre bontva mutatja, hogy a napi maximumok és minimumok hány százaléka esett az első, illetve az utolsó kereskedési órába. Minden évben megfigyelhető, hogy a napi maximumok na-

4. táblázat

#### A maximumok és minimumok gyakorisága az első és az utolsó órában

	Első óra		Utolsó óra		Szélső órák	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
1997	42.2	17.1	27.8	27.8	70.1	44.9
1998	35.7	19.0	31.7	28.2	67.5	47.2
1999	36.5	19.0	34.9	30.2	71.4	49.2
2000	40.1	24.2	28.6	26.6	68.7	50.8
2001	41.9	26.2	23.0	23.8	64.9	50.0
2002	44.0	31.7	23.8	23.0	67.9	54.8
2003	36.4	23.5	21.2	21.2	57.6	44.7

gyobb hányada van az első órában, mint a napi minimumoké, ugyanakkor az utolsó órába körülbelül ugyanakkora hányada esik a minimumoknak, mint a maximumoknak. A minimumok viszont sokkal gyakrabban esnek a kereskedés középső óráiba. Ez egy olyan jelenség, ami jelen-

tősen eltér a Monte Carlo-szimulációban tapasztaltaktól.

Mindez arra enged következtetni, hogy a napi maximumok gyakrabban előzik meg időben a napi minimumot, mint amilyen gyakran fordított a sorrend. Az 5. táblázat azt mutatja, hogy milyen gyakran

5. táblázat

**Minimumok és maximumok  
időbeli sorrendje**

	HL	LH
1997	41.7	10.2
1998	33.3	13.9
1999	31.3	14.3
2000	29.0	10.7
2001	29.4	11.7
2002	23.0	10.7
2003	28.0	15.9

esett korábbi félórás periódusba a napi maximum, mint a minimum (az időrend HL), és milyen gyakran esett korábbi periódusba a minimum, mint a maximum (az időrend LH). Akkor, amikor a napi minimum ugyanabba a félórába esik, mint a napi maximum, az időrend nem határozható meg.

Ez egy meglepő eredmény, amelyre egyelőre semmilyen, a piaci hatékonysággal összeférő magyarázatot nem ismernek. Sőt, úgy tűnik, egy olyan anomáliáról van szó, amely felhasználható úgy, hogy többlethozamot lehet elérni a „vedd és ülj rajta” stratégiához képest, anélkül, hogy nagyobb kockázatot kellene vállalni. A 6. táblázat négy egyszerű, hipotetikus stratégia hozamait mutatja az 1997-től 2003-ig terjedő teljes időszakra, az 1997-től 1999 végéig tartó bikapiac időszakára, illetve a 2000-tól 2003-ig tartó medvepiaci időszakra. A BH stratégia a vedd és ülj rajta stratégia, az O-C stratégia nyitástól zárásig birtokolja a tőzsdeindexet (minden egyes nap nyitáskor vesz, záráskor elad), a C-O stratégia éppen ellenkezőleg, záráskor vesz és a követ-

6. táblázat

**Különböző stratégiák hozamai**

	BH	O-C	C-O	C-10
97-03	54	15	34	251
97-99	345	193	52	210
00-03	-65	-61	-12	13

kező napi nyitáskor ad el, végül a C-10 stratégia minden nap záráskor vesz és a következő nap 10-kor ad el.

A C-10 stratégia elképesztő mértékben jobb a „vedd és ülj rajta” stratégiánál: míg a „vedd és ülj rajta” stratégiával a befektető 54 százalékkal növelhette a vagyont a vizsgált teljes időszakban, a C-10 stratégiával 251 százalékkal. A különbség első sorban a medvepiaci teljesítményből fakad: míg a bikapiacra a C-10 stratégia valamivel rosszabb volt, mint a BH stratégia, a medvepiacra, amikor a BH stratégia 65 százalékos vagyonszűntést eredményezett, a C-10 stratégia nyereséges volt!

Ez az eredmény mindenképpen további vizsgálatot érdemel, de semmiképpen nem kell azt gondolni, hogy megtaláltuk az azonnali meggazdagodás forrását. Több ok is elképzelhető, ami miatt nem ismétlődik meg a C-10 stratégia felülteljesítése:

- A vizsgált időszak felét extrém medvepiac tette ki, ami normál körülmények közt nem jellemző.
- A fenti táblázatban nem számoltunk a tranzakciós költségekkel. Ugyan ma már olyan olcsón lehet kereskedni a Nasdaq 100-ra vonatkozó derivatívokkal (QQQ, Nasdaq futures), hogy

az a C-10 stratégia előnyét nem emésztene fel, de a C-10 stratégia napenkénti kereskedési költsége mindenképpen csökkenti a BH stratégiával szembeni esetleges előnyt. Az 1997–2003 időszak történelmileg a legvolatilisabb időszakok közé tartozik. Ha a piaci volatilitás lecsökken, az oly mértékben csökkentheti a sűrű kereskedéssel elérhető előnyöket, hogy azt teljes egészében felemésztik a tranzakciós költségek.

- A folyamatos intézményi változás, a piac globalizálódása és a technikai alapon kereskedők alkalmazkodása megváltoztathatja a napon belüli áralakulás jellemzőit.
- Végezetül elképzelhető, hogy a Quote.com által rendelkezésre bocsátott adatok nem teljesen megbízhatóak. Mielőtt a kereskedési stratégiák hozamából messzemenő következtetéseket vonnánk le, indokoltnak tűnik számításaim alternatív adatforrások alapján való ellenőrzése.