Gáll József–Nagy Gábor

A működési kockázat veszteségeloszlás-alapú modellezése (Loss Distribution Approach – LDA)[1]

Jelen írásunkban összefoglaljuk a működési kockázat veszteségeloszlás-alapú megközelítésének (Loss Distribution Approach – LDA) elméleti alapjait, és tárgyaljuk a használatához szükséges statisztikai módszertant is. Természetesen az LDA-nak az ebben a cikkben tárgyalt elméleti alapjai ismertek a szakirodalomban, beleértve a szabályzók által előírtakat is, ezért írásunknak nem az a célja, hogy újabb elméleti eredményeket és modelleket mutasson be. Azonban különösen fontosnak tartjuk néhány olyan alkalmazással kapcsolatos probléma bemutatását (modellszelekciós kérdések, statisztikai kérdések), amelyek átgondolása kritikus részét alkotja egy adott pénzintézet működési kockázatai esetén a sikeres alkalmazásnak. Ehhez számos példát és szimulációs eseteket ismertetünk, amelyek jól mutatják majd azt, hogy az egyes szabályozói előírásoknak és modellspecifikációs lépéseinknek, döntéseinknek milyen következménye van egy LDA-alapú modellben a működési kockázathoz tartozó tőkekövetelményre vonatkozóan.

Bevezetés

A működési kockázatok kezeléséről és tőkekövetelményéről szóló uniós szabályozás (Capital Requirement Directive – CRD[2]) hazai implementálása és bevezetése már folyamatban van, megjelenése újabb kihívás elé állítja a hitelintézeteket[3] (Validációs kézikönyv, Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete [2006], 200/2007 [VII. 30.] Korm. r.). Míg a szabályozó kisebb tőkekövetelménnyel kívánja jutalmazni a kockázataikat mélyebben feltérképező, jobban megértő és szofisztikáltabb tőkeképzési módszereket alkalmazó intézményeket, addig az ilyen modellek implementálása számos nehézséggel jár. Írásunkban a fejlett mérési módszertan (Advanced Measurement Approach – AMA) kereteibe illeszkedő statisztikai módszertan, a Loss Distribution Approach – LDA eszközrendszerével mutatjuk be a működési kockázatok modellezését. Az AMA mellett a szabályozó (Validációs kézikönyv, Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete [2006]) még másik három egyszerűbb tőkeképzési lehetőséget kínál a hitelintézeteknek, az alapmutató módszert (Basic Indicator Approach

1 A cikk megírását támogatták az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok (OTKA) OTKA-F046061/2004, OTKA-T048544/2005 számú pályázatai.

2 CRD alatt az Európai Unió 2006/48/EC számú és 2006/49/EC számú direktíváit értjük.

3 Hpt. szerinti hitelintézetek és hitelintézettel egyenértékű prudenciális szabályozásnak megfelelő pénzügyi vállalkozások.

– BIA), a sztenderdizált módszert (Standardised Approach – TSA) és az alternatív sztenderdizált módszert (Alternative Standardised Approach – ASA). Míg a BIA, a TSA és az ASA egyszerű formulákon keresztül adja meg a képzendő tőke nagyságát, addig az AMA-módszerrel az intézmény szofisztikált belső modellt építhet a kockázatok valódi jellegének feltérképezésén alapulva.

A fentiek következménye a BIA, a TSA és az ASA csekély kockázatérzékenysége, továbbá az AMA-hoz viszonyítva, tipikusan magasabb tőkekövetelményt is jelentenek[4]. Ám jegyezzük meg, hogy egyes nagy alaptőkéjű hitelintézeteknél néhol előfordultak ezzel ellentétes tapasztalatok is (l. Committee of European Banking Supervisors [2006]).

Ahhoz, hogy a hitelintézetek a fejlett módszertant alkalmazhassák, számos előírásnak kell eleget tenniük (Basel Committee on Banking Supervision [2003], 200/2007 [VII. 30.] Korm. r.). Ezeket nem soroljuk fel tételesen, csupán azokat, amelyek a modellépítés szempontjából relevánsak.

1. A belső modellnek mind a várható, mind a nem várt veszteségeket meg kell ragadnia.
2. A kis valószínűséggel bekövetkező, ugyanakkor potenciálisan nagy hatást okozó eseményekre is fedezetet kell nyújtania a tőkének 99.9 százalékos valószínűséggel, 1 éves időtávon.
3. A belső modellnek figyelembe kell vennie
- az intézmény saját, belső adatait,
- a külső adatokat,
- az üzleti környezetet tükröző tényezőket,
- a forgatókönyv-elemzést (scenario analysis).
4. Az intézményeknek legalább 5 éves idősort kell figyelembe venniük a tőkekövetelmény-számításhoz.[5] Továbbá a hitelintézet belső veszteségadatainak átfogóaknak[6] kell lenniük.
5. A hitelintézeteknek a veszteségadatokat üzletágaknak és veszteségkategóriáknak kell megfeleltetnie.
6. A belső adatok gyűjtésének alsó határértékét az intézménynek meg kell határoznia.
7. A hitelintézet modelljébe beépíthet és így alkalmazhat a veszteségadatok között korrelációs feltételezéseket[7].

Tanulmányunkat két részre osztottuk: jelen írásunkban a historikus adatokból kiinduló, LDA-alapú tőkeképzés alapjait mutatjuk be, míg a soron következő számok egyikében tervezett második rész egy LDA-ra épített kockázati önértékelést (Control and Risk Self

4 A szabályozás egyik jellemvonása, hogy a szofisztikáltabb módszereket alkalmazó intézményeket kevésbé büntetik magas tőkekövetelménnyel. Emögött az a logika húzódik meg, hogy minél komplexebb módszert választunk, annál pontosabb képet kapunk az intézmény működési kockázatairól.

5 A fejlett mérési módszer bevezetésekor elegendő 3 évnyi adattal rendelkeznie a hitelintézetnek.

6 Átfogóaknak kell a belső veszteségadatoknak lenniük abban az értelemben, hogy meg kell ragadniuk a vonatkozó alrendszerek és földrajzi régiók összes főbb tevékenységét és kitettségeit. A hitelintézeteknek bizonyítaniuk kell, hogy a kizárt tevékenységek vagy kitettségek sem egyénenként, sem együttesen nem befolyásolják lényegesen az átfogó kockázati becsléseket.

7 Amennyiben tudja igazolni, hogy a korreláció mérésére alkalmazott módszerei megbízhatóak (azaz mennyiségi és minőségi módszerekkel alá vannak támasztva), továbbá azt, hogy figyelembe veszi a korrelációs becslések ismert hiányosságaiból adódó hibákat (200/2007 [VII. 30.] Korm. r.).

Assessment – CRSA) tár fel. Ez utóbbi foglalja magában az üzleti környezet változását és a forgatókönyv-elemzést.

Jelen írásunk célja, hogy bemutassuk az LDA alapjait, annak implementálhatóságát a működési kockázatkezelésben, illetve példák és szimulációk segítségével azt, hogy az egyes szabályozói előírásoknak és modellspecifikációs lépéseknek milyen következménye van egy LDA-alapú modellben. Ennek megfelelően, először ismertetjük a szükséges fogalmakat, definíciókat, legfőképpen azt, hogy milyen modellt vesz alapul az LDA, és ennek alapján mit tekinthetünk tőkekövetelménynek. Ezután tárgyaljuk a tőkekövetelmény becslésének kérdését, majd a becsléshez használt eszközöket és döntési kérdéseket tekintjük át részletesebben. Az utolsó részben számos példát és szimulációt is bemutatunk a fontosabb statisztikai és alkalmazási problémák, modellszelekciós kérdések szemléltetésére. Végül következtetésekkel zárjuk írásunkat.

1. A tőkekövetelmény LDA esetén

A pénzintézetben az operációs kockázat számításához először részekre kell osztani az operációs kockázathoz tartozó tevékenységek és folyamatok egészét. Ezeket a részeket elsősorban a szabályozó által ajánlott *veszteségkategóriák* szerint – 7 kategóriát szokás kialakítani[8] – és *üzletágak* szerint – 8 üzletágat szokás elkülöníteni[9] – alakítják ki. Ezen két szempont szerint tehát létrejön egy 7 x 8-as méretű mátrix, nevezzük ezt az *operációs kockázatok mátrixának*, amely a feltüntetett szempontok szerint egy csoportosítását adja a működési kockázati eseményeknek. Ennélfogva akár 56 különböző csoportot is kialakíthatunk, de a valóságban nem feltétlenül tanácsos egy ilyen részletes bontás, mert annak számos hátránya van, amelyeket a későbbiekben tárgyalunk. Ezért azt javasoljuk, hogy célszerű összevonni egyes elemeit ennek az 56 elemű mátrixnak, s így létrehozni néhány nagyobb csoportot. A továbbiakban ezeket a csoportokat az operációs kockázat *osztályainak* fogjuk nevezni. Ezek, ahogy a működési kockázatok mátrixának 56 csoportja, valóban egy osztályozását adják a lehetséges eseményeknek (veszteségeknek): azaz minden operációs kockázat szempontjából felmerülő esemény beletartozik valamelyik osztályba, ugyanakkor átfedések nincsenek az osztályok között. Nem foglalkozunk viszont ebben az írásban azzal a problémával, hogy egy esemény több osztályt is érinthet (pl. több üzletág együttes hibájának a következménye a veszteség), és ennek következtében az intézmény a veszteséget megosztaná az érintett osztályok között. A továbbiakban jelölje M a létrehozott osztályok számát. A későbbiekben részletesen visszatérünk arra a problémára, hogy milyen elvek szerint érdemes kialakítani az osztályokat az operációs kockázat mátrixának elemeinél, az összevonásokat elvégezve.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy adott egy operációs kockázati osztály, s az operációs kockázatot (tőkekövetelményt) erre az osztályra kívánjuk

8 Veszteségkategóriák: (a) belső csalás, (b) külső csalás, (c) munkáltatói gyakorlat és munkabiztonság, (d) ügyfél, üzleti gyakorlat, marketing- és termékpolitika, (e) tárgyi eszközökben bekövetkező károk, (f) tevékenységbeli zavar vagy rendszerhiba, (g) végrehajtás, teljesítés és folyamatkezelés.

9 Üzleti kategóriák: (a) vállalati pénzügyek, (b) kereskedés és értékesítés, (c) lakossági közvetítői tevékenység, (d) kereskedelmi banki tevékenység, (e) lakossági banki tevékenység, (f) fizetési és elszámolási tevékenység, (g) a pénzügyi szolgáltatás közvetítése (ügynöki) tevékenység, (h) vagyonkezelési tevékenység.

meghatározni. Továbbá feltételezzük, hogy rögzített egy időintervallum (tipikusan 1 év), amelyre meghatározzuk a tőkekövetelményt.

Az LDA módszertana szerint a következőt feltételezzük az operációs veszteségekről. Jelölje a vizsgált időszakban az adott kockázati osztályban bekövetkező i-edik eseményhez tartozó (egyedi) *veszteség* értékét (ahol i pozitív egész)! Az egyszerűség kedvéért a későbbiekben azonban azt feltételezzük, hogy egy eseményhez csak egy veszteség tartozik. Ez nem jelent megszorítást, csupán lehetővé teszi, hogy az esemény és veszteség szavakat szinonimaként használjuk. Ezeket egyedi veszteségeknek is fogjuk a későbbiekben nevezni, hangsúlyozva a teljes veszteségtől való különbözést. Ekkor X_i egy nemnegatív értékű valószínűségi változó. Feltételezzük, hogy X_1, X_2, X_3... függetlenek és azonos eloszlásúak. Ezek nem túlzottan szűkítő feltételezések, hiszen ezek értelmében a vizsgált időszakban bekövetkező veszteségek egymástól függetlenek, és azok azonos eloszlását azért indokolt feltételeznünk, mert ugyanazon rögzített veszteségkategória és üzletág veszteségei, tehát azonos típusúak. Az adatgyűjtéshez és a modellezéshez fontos a veszteségek (események) pontos definiálása és besorolása. Ez különösen lényeges a több veszteségkategóriát vagy üzletágat is érintő eseményeknél, ahol a belső szabályozásnak egyben hatása lehet a tőkekövetelményre, az aggregációs kérdésekre, amelyekre később még utalunk. Jegyezzük meg azt is, hogy egyes események akár negatív veszteséggel is járhatnak, amelyet jelen írásban nem veszünk figyelembe[10].

Jelölje továbbá η az adott időszakban az adott kockázati osztályban bekövetkező veszteségek számát. Ennélfogva η is egy valószínűségi változó – hiszen nem ismerjük előre a veszteségek számát –, amely nemnegatív egész értékeket vehet fel. A továbbiakban η-t egyszerűen *gyakoriságnak* fogjuk nevezni, η eloszlását pedig gyakoriságeloszlásnak. Felteszzük, hogy az X_i változók az η változótól is függetlenek. Jelölje végül S az adott időszakban az adott kockázati osztályban bekövetkezett *összes (vagy teljes) veszteség* értékét. Nyilvánvalóan

$$S = \sum_{I=1}^{\eta} X_i \ .$$

Ahogy hangsúlyoztuk, a fentiekben leírt modell nem a pénzintézet teljes operációs kockázatára, hanem csak egy rögzített (veszteségkategóriák és üzletágak alapján kialakított) osztály kockázatára és az ahhoz tartozó tőkekövetelmény meghatározására vonatkozik.

A teljes veszteség itt ismertetett modellje a valószínűség-számításban és statisztikában jártas olvasók előtt közismert modellt és megközelítést mutat. A későbbiekben részletesen tárgyaljuk, hogy milyen eloszláscsaládokat ajánlatos használni a veszteségek és a gyakoriság esetén. Ha specifikusan η eloszlása Poisson, akkor S eloszlása nem más, mint az ún. *összetett Poisson-eloszlás*, amelyet a pénzügyi és a biztosítási matematikában is számos helyen alkalmaznak. Általánosan pedig S eloszlását a továbbiakban *összetett eloszlásnak*

10 Ám megjegyezzük, hogy ilyen módon is bővíthetjük a jelen írásban leírt modelleket (például alkalmas feltevésekkel a feltételes veszteségeloszlásokról). Itt említhető az a rokon probléma is, hogy a szabályzó a belső adatokra vonatkozóan veszteségküszöb használatát is lehetővé teszi. Továbbá fontos, hogy az adatbázisból csak azok a veszteségadatok hagyhatók ki, amelyek bizonyíthatóan nem befolyásolják jelentősen sem egyedileg, sem pedig összességében a teljes kockázatot (Validációs kézikönyv, Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete [2006]).

fogjuk nevezni az egyszerűség kedvéért. Érdemes hangsúlyozni a definícióban a függetlenség feltételét, amely nemcsak az egyedi veszteségekre vonatkozik, hanem azoknak a gyakoriságot leíró változótól való viszonyára is.

A szakirodalomban számos tulajdonság, elméleti eredmény ismert az összetett (Poisson-) eloszlásokról. Nem célunk ezen írásban az elméleti eredmények összefoglalása, ám a későbbi részekben megemlítjük a szóban forgó eloszlások néhány számunkra szükséges, fontosabb tulajdonságát.

A továbbiakban egy Y valószínűségi változó eloszlásfüggvényét F_y fogja jelölni, azaz $F_s(x)=P(S<x)$, ahol $x \in R$, továbbá R a valós számok halmaza.

Az összes veszteséghez tartozó *tőkekövetelmény-hozzájárulás* alatt annak egy adott biztonsági szinthez tartozó *kockáztatott értékét* (Value at Risk – VaR) tekintjük. Ezt a tőkekövetelmény-hozzájárulást a későbbiekben az egyszerűség kedvéért tőkekövetelménynek fogjuk nevezni.

Azaz, legyen $0<\alpha<1$, és tekintsük az $1–\alpha$ biztonsági szinthez tartozó VaR-értéket, amely megadja az LDA alapján az adott kockázati osztályhoz tartozó tőkekövetelményt. Itt eltekintünk attól, hogy a szabályozó lehetőséget ad arra, hogy bizonyos esetekben tőkekövetelmény alatt a várható értékkel csökkentett kockáztatott értéket értsük. A VaR pedig nem más, mint egy $1–\alpha$ rendű *kvantilis*: megmutatja azt az összeget, amelynél nagyobb teljes veszteség bekövetkezésének valószínűsége α, azaz $1–\alpha$ biztonsággal mondhatjuk, hogy a vizsgált időszakban a teljes veszteség nem fogja meghaladni a VaR által megadott értéket. A fentiek alapján a következő módon adhatjuk meg a VaR precíz definícióját:

$$VaR_{1-\alpha}(S) = \sup\{x \in R \mid F_S(x) = P(S < x) < 1-\alpha\} \ .$$

Ebben az esetben tehát az alsó kvantilis adja a VaR értékét, ezért $VaR_{1-\alpha}$-t az $1–\alpha$ rendű alsó VaR-nak szokás nevezni. Természetesen hasonlóan definiálható a felső VaR fogalma is a megfelelő felső kvantilis segítségével:

$$VaR^{1-\alpha}(S) = \inf\{x \in R \mid F_S(x) = P(S < x) > 1-\alpha\}\,.$$

Az alsó és felső kvantilis nem szükségképpen esik egybe[11]. Abszolút folytonos eloszlásoknál azonos értéket ad adott szint mellett, hiszen ekkor egyszerűen legyen q az az érték, amelyre

$$F_s(q) = 1–\alpha$$

teljesül, hiszen ekkor nyilvánvalóan

$$VaR_{1-\alpha}(S) = VaR^{1-\alpha}(S) = q.$$

Közismert, hogy a két érték különbözhet, például diszkrét eloszlások esetén bizonyos szinteken. (A precízség kedvéért jegyezzük meg azt is, hogy bizonyos esetekben az sem teljesül, hogy pontosan α és $1–\alpha$ a $VaR_{1-\alpha}$-nál vagy a $VaR^{1-\alpha}$-nál nagyobb, illetve kisebb

11 Már egy egyszerű (akár kétértékű) diszkrét valószínűségi változónál is előfordulhat ilyen eset, hiszen az eloszlásfüggvénye lépcsős, ám az összetett veszteségek esetén ennek jelentősége nem igazán nagy egy megfelelően „gazdag” modell esetén. Ezen problémakört példákkal együtt tárgyalja Gáll és Pap [2005].

veszteségek valószínűsége.) A VaR ezen tulajdonságaival ebben az írásban nem foglalkozunk részletesen, hiszen a későbbiekben tárgyalandó példák és problémák szempontjából nem lényeges. (Az érdeklődő olvasónak ajánljuk Gáll és Pap [2006] jegyzetét, ahol az említett kérdéseket részletesen vizsgáltuk.) Megjegyezzük, hogy az alsó és felső VaR mellett más VaR-fogalmakat is szokásos definiálni (például a fenti VaR-fogalmak bizonyos átlagát véve), de ennek írásunk szempontjából nincs jelentősége.

A továbbiakban a fentiekben leírt módon meghatározott tőkekövetelményt operációs kockázatnak fogjuk nevezni az egyszerűség kedvéért. Működési kockázatok esetén a szóban forgó értékre a VaR elnevezés helyett szokásos a *Capital at Risk* elnevezés is, amelyet talán *kockáztatott tőkének* nevezhetnénk.

A bázeli ajánlások szerint (Basel Committee on Banking Supervision [2001]) az összes kialakított osztály tőkekövetelményének összegeként adódik a pénzintézet operációs kockázatára vonatkozó teljes tőkekövetelménye. Tehát ha adott M osztály, amelyek teljes vesztesége az adott időszakban rendre $S^{(j)}$, ahol $j=1, 2, \ldots M,$ és az ezekhez tartozó tőkekövetelmények értéke rendre

$$T^{(j)} = VaR_{1-\alpha}(S^{(j)}),$$

akkor az LDA alapján a pénzintézet adott időszakhoz tartozó operációs kockázatokra meghatározott *teljes tőkekövetelménye*[12]

$$T = \sum_{j=1}^{M} T^{(j)} \ .$$

Jegyezzük meg azt is, hogy egyes esetekben a szabályozó lehetőséget ad arra is (bizonyos feltételek teljesülése mellett[13]), hogy a hitelintézet által képzett tőke csupán az ún. *nem várt veszteségekre* nyújtson fedezetet, ebben az esetben a következő összefüggés érvényes:

$$T^{(j)} = VaR_{1-\alpha}(S^{(j)}) - ES^{(j)},$$

ahol E a várható értéket jelöli.

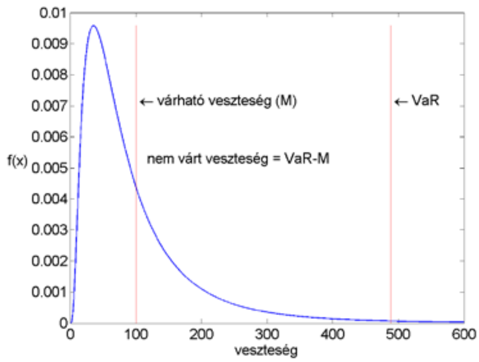
Az *1. ábra* egy lognormális eloszláson szemlélteti a VaR, az elvárt veszteség (várható veszteség) és a nem várt veszteség viszonyát a sűrűségfüggvénye mellett. A *2. ábra* ugyanezen mennyiségek viszonyát mutatja egy összetett eloszlás, azaz a teljes veszteségek esetén.

12 Frachot, Roncalli és Salomon [2004] megmutatta, hogy valójában a tőkekövetelmények ilyen összegzése akkor indokolt elméletileg, ha a különböző kockázatokból származó veszteségek egyfajta teljes függősége („tökéletes korrelációja”) fennáll. Ez nem életszerű helyzetet tükröz, ugyanakkor az intézmények ettől csak akkor térhetnek el, ha a korreláció mérésére alkalmazott módszereit a felügyeleti szerv jóváhagyja. A veszteségek közötti függőségek kérdésével ezen tanulmány nem foglalkozik, az érdeklődő olvasónak ajánljuk a fent hivatkozott tanulmányt.

13 A várt (várható) veszteséget nem kell a tőkeképzés során figyelembe vennie az intézménynek, amennyiben bizonyítja a felügyeletnek, hogy szabályzatában meghatározta a várható veszteségek mérséklésére vonatkozó eljárásokat, azaz belső üzletviteli eljárásaiban azokat más módon (pl. céltartalékképzésben, termékei árazásakor) már figyelembe veszi.

1. ábra

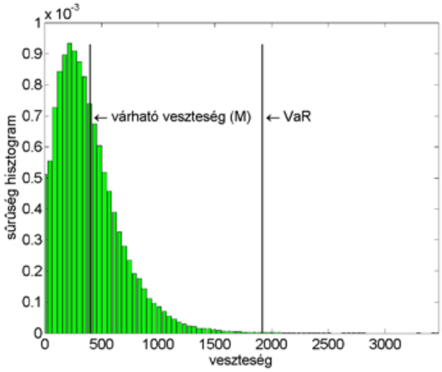
Várható veszteség, kockáztatott érték és a nem várt veszteség mint statisztikai jellemzők illusztrálása a lognormális eloszláson (μ=4,26 σ=0,83)



Természetesen adódik az a kérdés, hogy milyen α érték mellett érdemes a VaR-t számolni, és így a tőkekövetelményt meghatározni. A magyar szabályozás α=0,001 mellett írja elő a VaR meghatározását egyéves időszak során bekövetkező működési kockázati veszteségekre vonatkozóan (200/2007. [VII. 30.] Korm. r.), azaz 99,9 százalékos biztonság mellett kell majd meghatározni a tőkekövetelményt operációs kockázatok esetén az AMA- (így az LDA-) módszertant választóknak. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy ezt az egyetlen értéket tanácsos meghatározni. A VaR napjainkban a leggyakrabban használatos kockázati mérték a modern pénzügyben. Annak meghatározása különböző α értékek esetén fontos információt ad a vállalt kockázatokról, ezért érdemes néhány VaR-értéket meghatározni különböző biztonsági szinteken még akkor is, ha azokat a készülő szabályozás nem követeli meg, hiszen a veszteségek eloszlásának tulajdonságai, különösképpen a farok (szél) viselkedése (nagy veszteségek) jól tükröződik a különböző VaR-értékekben.

2. ábra

A várható veszteség és a kockáztatott érték mint statisztikai jellemzők illusztrálása Poisson (λ=4) – lognormális (μ=4,26 σ=0,83) (P-L) összetett eloszláson



Fontos megjegyeznünk azt is, hogy portfóliók, pénzügyi eszközök esetén nem a VaR az egyetlen kockázati mérték (mutató), amelyet lehet vagy ajánlatos használni. Sőt, a szakirodalomban számos publikációt találhatunk arról, hogy az egyes mutatóknak milyen előnyös és hátrányos tulajdonságai vannak. A Value at Risk esetén a legfontosabb kritika az, hogy nem teljesíti a szubadditivitás tulajdonságát[14]. Így a VaR nem lesz koherens kockázati mérték. Jelen írásban nem célunk a kockázati mértékeknek és a VaR tulajdonságainak részletes tárgyalása, az érdeklődő olvasó többet tudhat meg ezen kérdéskörről többek között *Acerbi* [2004], *Delbaen* [2000], valamint Gáll és Pap [2005] munkáiban, de itt említhetnénk számos más szakirodalmi forrást is.

2. Az operációs kockázat becslése

Az előző részben megismerkedtünk azzal, hogy LDA esetén milyen mutatóval érdemes az operációs kockázatot jellemezni, és így magát a tőkekövetelményt megadni. Amint láttuk, annak megadása feltételezi a veszteségeloszlás és a gyakoriságeloszlás ismeretét. Azok együttesen már meghatározzák a teljes veszteség eloszlását, amely pedig nyilvánvalóan meghatározza a kérdéses VaR-értékeket is. A gyakorlatban természetesen nem ismertek az említett (elméleti) eloszlások, így a VaR-értékeket valamilyen statisztikai módszerrel kell becsülni. A VaR becslése egyszerű feladatnak tűnik, hiszen egy kvantilis becsléséről van szó, ám számos statisztikai kérdés felvetődik a becslés módszerének megválasztása és a becslés során is. Cikkünk további részében ezeket a kérdéseket kívánjuk áttekinteni.

Mivel egy kvantilis becslése a feladatunk, így természetesen adódik egy közvetlen módszer, nevezetesen tekintsük a kvantilisnak a statisztikában jól ismert becslését, úgy is

14 Szubadditívnak nevezünk egy kockázati mértéket, ha két portfólió esetén a portfóliókra külön-külön számolt kockázati mértékek – azaz kockázatok – összegénél nem lehet nagyobb a két portfólió egyesítésével létrehozott portfólió kockázati mértéke, azaz kockázata.

mondhatnánk, hogy az empirikus kvantilist. (Itt most nem térünk ki arra, hogy mi a precíz definíciója a szakirodalomban ismert becsléseknek, s melyek a becslések statisztikai tulajdonságai, különös tekintettel a különböző kvantilisfogalmak okozta apróbb különbségekre.) Ezt nevezhetjük egy nemparaméteres módszernek is, hiszen valójában nem feltételezné az eloszlások és azok paramétereinek ismeretét, becslését. Ehhez mindössze a teljes veszteségeket tartalmazó minta kellene minél több megfigyelt időszakra, azaz minél nagyobb mintaelemszámmal.

Azonban ez működési kockázatok esetén nyilván nem járható út, hiszen a teljes veszteségadatok száma, azaz a megfigyelt időszakok száma nagyon kevés a magyar pénzintézeteknél, általában néhány év. Ehhez jegyezzük meg, hogy egyáltalán az operációs kockázatok számításához szükséges adatbázisok következetes kialakítása a legtöbb pénzintézetnél néhány, esetenként mindössze 2-3 évre nyúlik vissza. De ha el is játszunk egy pillanatra a gondolattal – mi lenne, ha egy sok megfigyelt évet (időszakot) tartalmazó mintánk lenne, esetleg több évtizednyi minta –, akkor is láthatnánk, hogy ez a közvetlen kvantilisbecslés statisztikailag nem igazán adna megbízható eredményt. Itt két fontos dologra hívjuk fel az olvasó figyelmét. Az egyik probléma, hogy több év adatainak használata során egyáltalán nem lehetünk biztosak abban, hogy a teljes veszteséget leíró eloszlások nem módosultak, így a minta azonos eloszlású volta csorbul, ami számos problémát vetne fel. Másrészt jegyezzük meg, hogy jellemzően 99,9%-os biztonsági szinthez, tehát igen magas szinthez akarunk VaR-t becsülni, amelynél nem engedhetjük meg azt, hogy csak a teljes veszteségeloszlásokat tartalmazó mintát használjuk, elveszítve ezzel rengeteg információt az egyedi veszteségek és a gyakoriság eloszlásáról. Másképpen úgy is megfogalmazhatjuk ezt a problémát, hogy az intézmény rendelkezésére álló minta (teljes veszteségadatok száma) időszakonként (évente) csupán egy elemmel bővül, így több évtizednyi adatgyűjtés után is egy csupán néhány tucatnyi elemet tartalmazó mintából kellene meghatározni egy nagyon magas konfidenciaszinthez tartozó empirikus kvantilist.

A tőkekövetelmény becsléséhez így a szakirodalom inkább egy paraméteres, közvetett utat javasol. Ennek lényege az, hogy a teljes veszteségeket felépítő, egyedi veszteségek eloszlását és a gyakoriság eloszlását próbáljuk meghatározni. Ez esetben adott eloszláscsaládok paramétereinek becslését kell elvégeznünk, majd abból következtetni a teljes veszteség eloszlására és annak kvantilisaira.

Először összefoglaljuk röviden, hogy milyen feladatokat kell elvégeznünk, ha körültekintően akarjuk elvégezni a tőkekövetelmény kiszámítását a felvázolt paraméteres megközelítés esetén. A szükséges lépések az alábbiak:

- A minta létrehozása a megfelelő szűrési feltételek meghatározásával (időszak, veszteség kategóriák és üzletágak alapján az osztályok rögzítése).
- Az egyedi veszteségekhez használt eloszláscsaládok kiválasztása.
- A gyakorisághoz használt eloszláscsaládok rögzítése.
- A legjobban illeszkedő eloszláscsalád kiválasztása a vizsgált (veszteség-) osztály esetén megfelelő statisztikai módszerekkel (modellszelekció).
- A veszteségek és a gyakoriság eloszlásai esetén a szükséges paraméterek becslése és a kialakított modell illeszkedésének vizsgálata.
- Esetleges korrekciós tényezők, módosító hatások figyelembe vétele (pl. infláció, növekedés, korlátok, szűrt adatok).

- A teljes veszteség eloszlásának, jellemzőinek, mutatóinak (pl. momentumok) meghatározása, illetve becslése, különös tekintettel a szükséges kvantilis (azaz VaR) meghatározására vagy becslésére.
- Külső adatbázisok használatának megfontolása, és a becslési módszerek korrekciója ilyen esetekre.

A felvázolt feladatok nem jelentenek sorrendet, sőt, egyes problémákat – mint például a paraméterek becslése és modellszelekció – gyakorta egyszerre tudjuk kezelni. A fenti felsorolás sokkal inkább azt emeli ki: melyek azok a fontos lépések és szempontok, amelyeket a munkánk során mérlegelnünk kell, hogy egy megbízható, az ellenőrző szervek számára is elfogadható belső módszertant dolgozzunk ki egy adott pénzintézet működési kockázatainak modellezésére és a szükséges tőkekövetelmény meghatározására.

A következő részben a felsorolt lépések végrehajtásához szükséges (javasolt) módszereket, eljárásokat tekintjük át röviden. Nem célunk az egyes módszerek részletes elméleti bemutatása, hiszen azok közismertek a statisztika irodalmában. Célunk viszont egyrészt a szakirodalomban javasolt és alkalmazott módszerek áttekintése és azok alkalmazási kérdéseinek tisztázása, másrészt egyes kérdések kiemelése, amelyekről úgy gondoljuk, hogy a tárgyalt operációs kockázati problémák specifikumaiból adódóan fontosabbak lehetnek, mint más alkalmazásoknál. Ezek után pedig bemutatunk néhány példát és szimulációt is azzal a céllal, hogy egyes, általunk fontosnak tartott, empirikus vagy numerikus problémákra és a modellválasztás fontosságára felhívjuk a figyelmet.

2.1. A becsléshez, illesztéshez használt módszerek áttekintése, alkalmazási problémák

2.1.1. A mintáról

Először röviden kitérünk a mintanagyság problémájára. Ezt a kérdést részben már az előzőek során érintettük, hangsúlyozva, hogy általában néhány év adatai állnak egy pénzintézet rendelkezésére (és esetenként azok sem teljes körűen). Egy adott veszteségkategóriában pedig évente néhány tucat megfigyelés már átlagon felüli egy magyar pénzintézetnél (a pénzintézet mérete miatt), így egy adott veszteségkategórián belül egy-egy üzletágban már csak néhány adat van évente, sőt, egyes esetekben akár az is előfordulhat, hogy egyetlen adat sincs.

Ennélfogva különösen megfontolandó, hogy milyen egységekre számolunk külön tőkekövetelményt. Akár az operációs kockázat mátrixának mind az 56 elemére – azaz üzletág-veszteségkategória kombinációjára – számolhatnánk tőkekövetelményt, majd azok összegeként a teljes tőkekövetelmény adódna. Azonban a minták rendkívül alacsony mérete miatt statisztikai szempontból ajánlott összevonásokat alkalmazni, és így az 56-nál lényegesen kevesebb kockázati osztályt létrehozni. Például összevonhatunk üzletágak vagy veszteségkategóriák mentén. Azt is meg kell azonban gondolnunk, hogy az összevonások után még reálisnak tartjuk-e a teljes eloszlásra felírt összetett modellt, amelyben például feltételeztük az egyedi veszteségek eloszlásának azonosságát egy adott osztályon belül. Így talán ajánlatosabb a veszteségkategóriákat nem összevonni, vagy csak bizonyos kategóriákat összevonni, míg talán üzletáganként indokoltabb lehet az összevonás. A gyakorlatban is tipikusan használt, kézenfekvő megoldás az üzletágak összevonása, azaz csak a veszteségkategóriák szerinti bontás alkalmazása.

Fontos megemlítenünk, hogy itt nem adhatunk egy általános ajánlást. Csak az adott pénzintézet saját mintáját, korábbi évek tapasztalatát és az adatokon végzett statisztikai vizsgálatokat figyelembe véve érdemes és lehet kialakítani egy belső rendszert az összevonásokra. Hiszen például a termékkínálat, az ügyfélkör sajátosságai lényegesen befolyásolhatják az egyes kategóriákba eső adatok számát és jellegét (eloszlását). Továbbá fontos azt is hangsúlyoznunk, hogy a szabályzónak is el kell fogadnia a kialakított belső modellt.

2.2. Gyakran alkalmazott eloszlások és illesztésük

Az egyedi veszteségekről már megállapítottuk, hogy azokat nemnegatív értékű valószínűségi változóval írhatjuk le. Ennélfogva természetesen adódik, hogy nemnegatív értékű eloszláscsaládokat használjunk. További korlátozást általánosan ugyan nem tehetünk, azonban kiemelhetjük azoknak a nevezetes eloszlásoknak a körét, amelyeket a szakirodalomban is gyakorta ajánlanak. Ezeket tartalmazza az *1. táblázat*. A táblázatbeli eloszlások használatának egyik alapvető oka – amellett, hogy ezek a valószínűség-számításban számos helyen használt nevezetes nemnegatív eloszlások – az, hogy korábbi pénzügyi és biztosítási területen szerzett tapasztalatok (statisztikai vizsgálatok) alapján ezek az eloszlások jól illeszkedtek egyes vizsgált veszteségtípusokra. Kiemelendő, hogy kevés paraméterrel rendelkeznek ezek az eloszlások, amely a kis mintaméretek esetén fontos szempont a becslési megbízhatóság miatt. További alkalmas eloszlások találhatók *Panjer* [2006], valamint Panjer és *Willmot* [1986] művekben.

1. táblázat

Leggyakoribb veszteségeloszlások

Eloszlás	Paraméterek	Sűrűségfüggvény
Exponenciális	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x},\ x > 0$ 0, egyébként.
Lognormális	$\mu \in R,\ \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{(\ln x-\mu)}{2\sigma^2}},\ x > 0$ 0, egyébként.
Pareto (európai)	$c,\ a > 0$	$\frac{a}{c}\left(\frac{c}{x}\right)^{a+1},\ x > c$ 0, egyébként.

A gyakoriságeloszlások esetén a veszteségeloszlásoknál leírtakkal analóg módon mondhatjuk, hogy tekinthetünk tetszőleges nemnegatív egészértékű eloszlást. Ezek közül is elsősorban a *2. táblázatban* szereplő három eloszlás (Poisson-, binomiális és negatív binomiális) a leginkább javasolt. Ezeket akár tekinthetjük egy eloszláscsaládnak is, hiszen mindegyik ún. (*a, b, 0*) típusú eloszlás, amely azt jelenti, hogy léteznek olyan valós (*a, b*) paraméterek, hogy az η gyakoriság eloszlására teljesül az alábbi rekurzió:

$$P(\eta = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) P(\eta = n-1) \quad ,$$

minden pozitív egész *n* esetén. Könnyen bizonyítható, hogy egy (nemnegatív egészértékű) diszkrét eloszlás pontosan akkor (*a, b, 0*) típusú, ha az Poisson-, binomiális vagy negatív binomiális.

2. táblázat

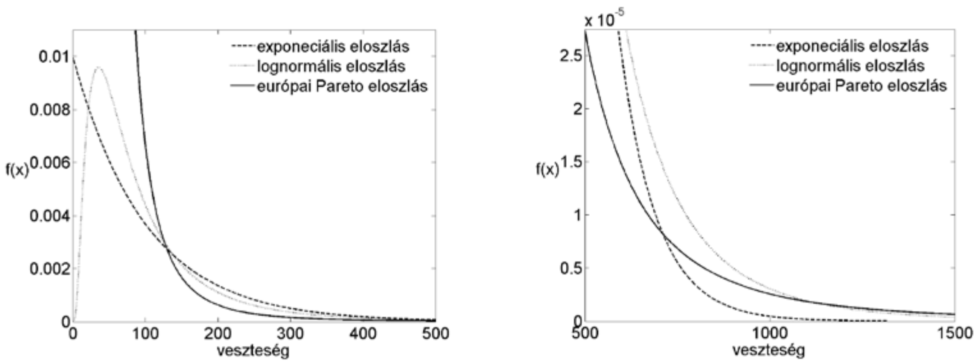
(*a, b,* 0) típusú eloszlások

Eloszlás	Paraméterek	P(η=k)	E(η)	D²(η)	*a, b* értékek
Binomiális	*n*: pozitív egész, $0 \le p \le 1$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \ldots, n.$	*np*	*np* (1–*p*)	$a = -\frac{p}{1-p}$ $b = \frac{(n+1)p}{1-p}$
Poisson	$\lambda \ge 0$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k = 0, 1, \ldots$	λ	λ	$a = 0$ $b = \lambda$
Negatív binomiális	*r*: pozitív, $0 \le q < 1$	$\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!}(1-q)^r q^k$ $k = 0, 1, \ldots .$	$\frac{rq}{1-q}$	$\frac{rq}{(1-q)^2}$	$a = q$ $b = (r-1)q$

Működési kockázatok esetén különösen kicsi a gyakoriságokhoz tartozó minták elemszáma, hiszen egy-egy megfigyelt időszak csak egy újabb mintaelemet ad. Ennélfogva – bár matematikailag könnyen kezelhető lenne mindhárom említett eloszlás, sőt, ahogy később látni fogjuk, ezen eloszlások esetén jól használható rekurziós képlet is ismert az együttes eloszlás meghatározására – azt javasolhatjuk, hogy a mindössze egy paraméterrel rendelkező Poisson eloszlást érdemes csak használni operációs kockázatok esetén. (Cikkünkben csak Poisson-eloszlású gyakoriságokkal végzünk ezért mi is szimulációs vizsgálatokat.) Ugyancsak a kis mintaméret miatt az is szükséges lehet, hogy a pénzintézet belső szakértői (szubjektív) becslést használjon statisztikai módszerek (pontbecslés) helyett, ha a statisztikai becslések hibája elfogadhatatlanul nagynak bizonyul. Erre a kérdésre az utolsó rész példáiban még visszatérünk.

3. ábra

Az exponenciális (λ=0.01), lognormális (μ=4,26 σ=0,83)
és európai Pareto- (α= 2,41 c=59) eloszlások sűrűségfüggvénye

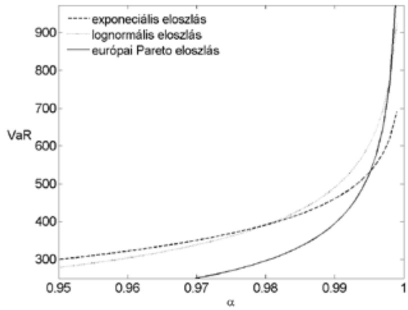


Megjegyzés: Az eloszlások várható értéke és szórása egyaránt 100.

Az eloszlások paramétereinek becslése, a legjobb eloszláscsalád kiválasztása, továbbá az illeszkedés jóságának vizsgálata is fontos feladat mind a veszteségeloszlások, mind a gyakoriságeloszlások esetén. A *3. ábrán* jól látható, hogy lényegesen különböző a néhány kiemelt veszteségeloszlás sűrűségfüggvénye, különösen kiemelnénk a farokeloszlásoknak a 3. ábra jobb oldalán látható, eltérő jellegét. Ezért nagyon fontos megfelelő eloszláscsaládot választanunk, hiszen annak a tőkekövetelmény értékére is nagy a hatása, különösen a farokeloszlások eltérő jellege miatt. Ennek szemléltetésére tekintsünk a *4. ábrára*, ahol a VaR-értékeket a szóban forgó egyedi eloszlásokra mutatjuk be ugyanazon paraméterértékek mellett, mint amit a 3. ábrán használtunk, így jól látható az eltérő jellegű sűrűségfüggvény okozta különbség. Természetesen ezeknek a hatását a teljes eloszlás VaR-értékeire is bemutatjuk a későbbi szimilációs vizsgálatainkban, hiszen ezzel azt vizsgálhatjuk, hogy a rosszul választott eloszláscsalád milyen hibát okozhat a tőkekövetelményben. Hasonlóan a veszteségeloszlásokhoz, a korábban említett, három nevezetes gyakoriságeloszlás egy konkrét összehasonlítását (azonos várható érték választása mellett) is bemutatjuk az *5. ábrán*. A paraméterbecsléshez, az eloszlások szelekciójához, az illeszkedés jóságának vizsgálatához természetesen a statisztikából jól ismert standard eljárásokat használhatjuk, például: hipotézisvizsgálatok illeszkedésre (l. x^2 próba, Kolmogorov–Smirnov-próba, Anderson–Darling-próba), grafikus eszközök (pl. hisztogram, PP-plot, QQ-plot), pontbecslési módszerek (pl. momentumok módszere, maximum likelihood módszer, kvantilis módszer). Mivel ezen eljárások alkalmazása során nem vetődnek fel a működési kockázatra jellemző, specifikus problémák, így ezeket jelen írásban nem tárgyaljuk részletesen.

4. ábra

Az exponenciális (λ=0.01), lognormális (μ=4,26 σ=0,83) és európai Pareto (α= 2,41 c=59) eloszlások kockáztatott értéke (VaR) a konfidenciaszint függvényében

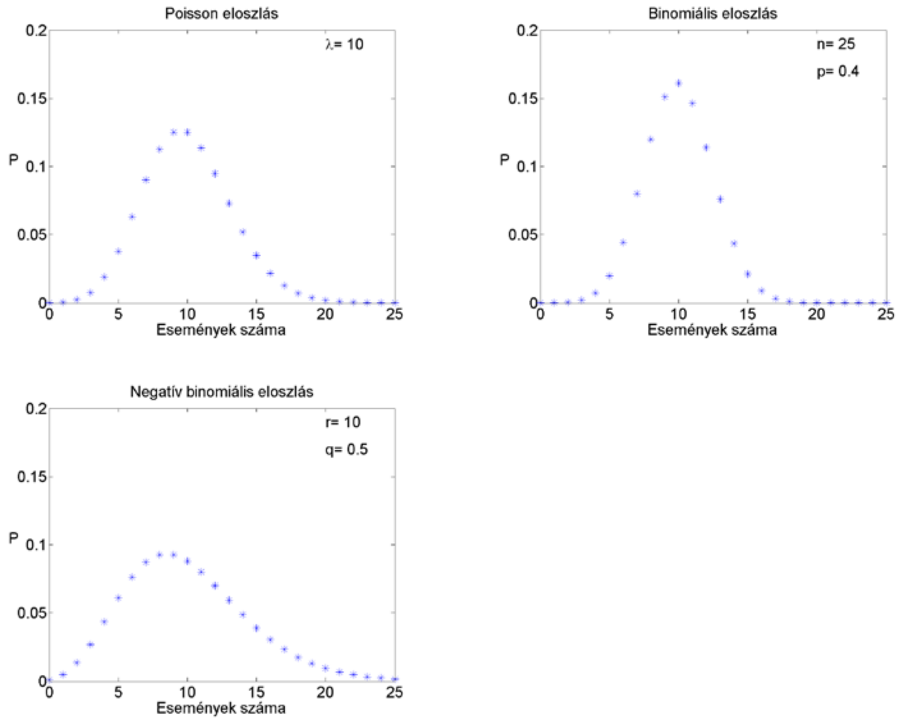


Megjegyzés: Az eloszlások várható értéke és szórása egyaránt 100.

Fontos ismernünk az adott pénzintézet adatrögzítési gyakorlatát. Egyes intézetekben ugyanis csak egy adott szint fölötti veszteségek kerülnek be a működési kockázatok adatbázisába, így a felhasználható mintába. Ez esetben tehát egy szűrt mintánk van, a szűrési feltételt a megadott limit jelentette. Ekkor, ha körültekintően akarunk eljárni, akkor az egyedi veszteségeknél és gyakoriságoknál ezeket a szűrési feltételt figyelembe véve kell számolnunk a paraméterbecsléseinket (akár a momentumok módszerének alkalmazása esetén, akár maximum likelihood-becslés esetén). Ennek a korrekciónak a lehetséges módozatait és azok részleteit jelen írásban nem célunk tárgyalni. Az érdeklődő olvasónak javasoljuk *Klugman*, Panjer és Willmot [2004] és Panjer [2006] műveit.

5.ábra

A Poisson (λ=10), binomiális (n=25, p=0,4)
és negatív binomiális (r=10, q=0,5) eloszlások szemléltetése



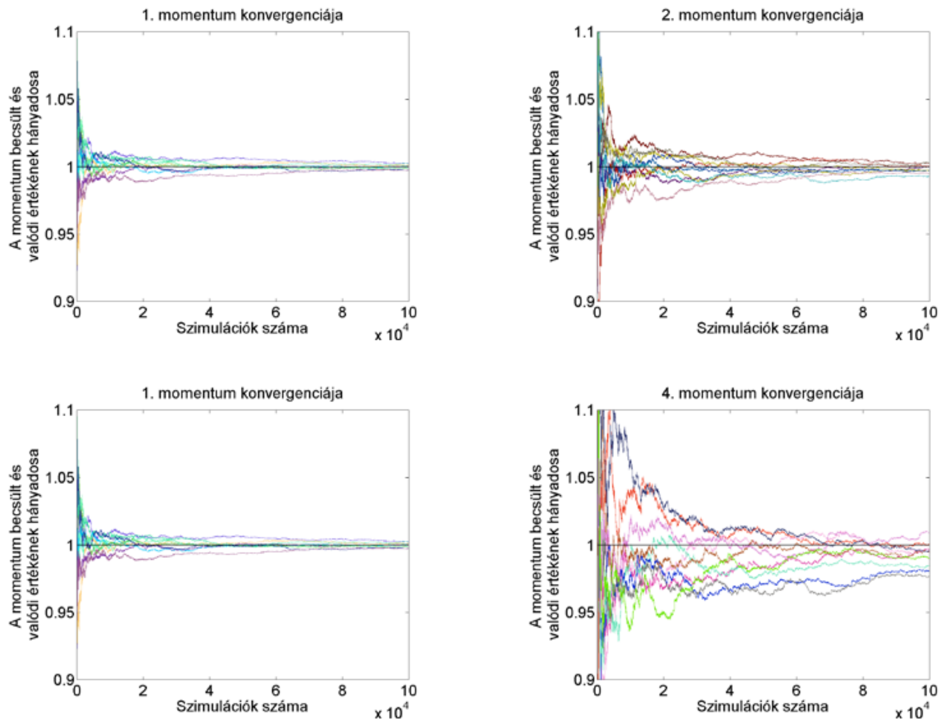
Megjegyzés: Az eloszlások várható értéke egyaránt 10.

2.3. Az összetett eloszlás és a tőkekövetelmény

A veszteség- és gyakoriságeloszlások ismeretében következő feladatunk a teljes eloszlás, illetve a teljes eloszlás kvantiliseinek meghatározása vagy becslése. Ehhez több módszer is rendelkezésünkre áll. A továbbiakban *X* egy olyan valószínűségi változót jelöl, amelynek eloszlása megegyezik az egyedi veszteségeloszlással. Emlékeztetőül hangsúlyozzuk, hogy az egyedi veszteségek azonos eloszlásúak a feltételezésünk szerint egy adott veszteségosztályban.

6. ábra

Összetett Poisson (λ=4) eloszlás első négy momentumának konvergenciája



Megjegyzés: A veszteségeloszlás lognormális eloszlású (μ = 4,26 σ = 0,83 paraméterekkel).

3. táblázat

A momentumok és a VaR jellemzőinek alakulása adott szimulációszám mellett, Poisson (λ=4) – lognormális (μ=4,26 σ=0,83) összetett eloszlás esetén

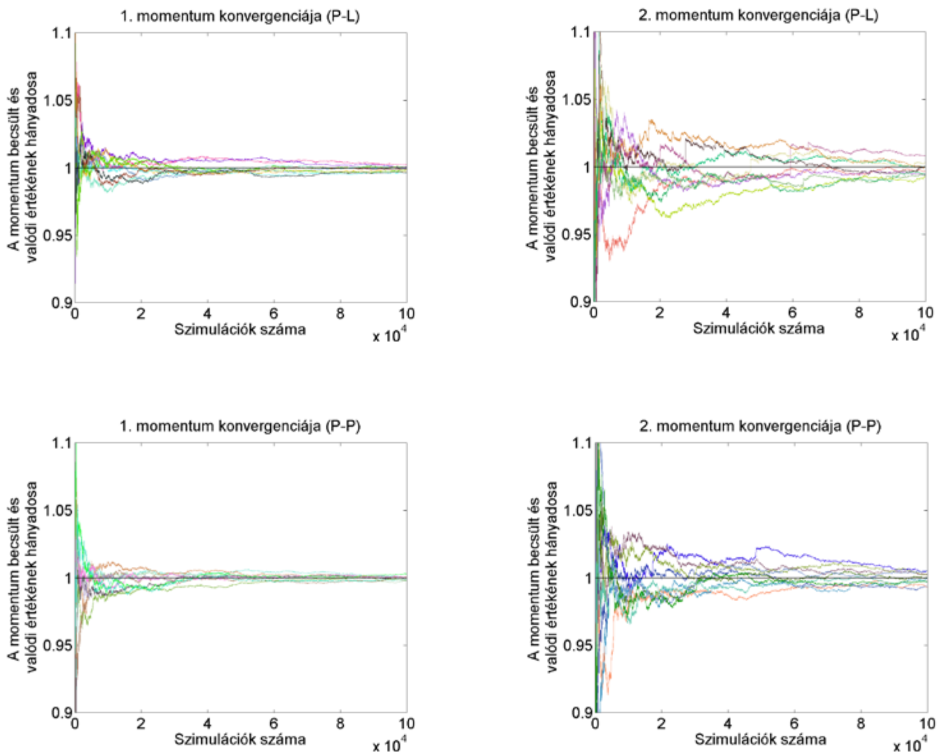
Összetett eloszlás meghatározásához használt szimulácók száma	1000	5000	10 000	50 000	100 000
M1 becsült/igazi átlag	1,0009	0,9999	0,9997	1,0001	1,0000
M2 becsült/igazi átlag	1,0031	1,0001	0,9997	0,9999	0,9998
M3 becsült/igazi átlag	1,0096	1,0008	1,0002	0,9992	1,0000
M4 becsült/igazi átlag	1,0305	1,0000	0,9996	0,9971	1,0060
M1 becsült/igazi SE	0,0217	0,0098	0,0071	0,0030	0,0025
M2 becsült/igazi SE	0,0504	0,0227	0,0168	0,0070	0,0058
M3 becsült/igazi SE	0,1170	0,0517	0,0363	0,0158	0,0139
M4 becsült/igazi SE	0,3596	0,1359	0,0862	0,0522	0,0663
VaR95 átlag	937	932	932	932	932
VaR99 átlag	1 313	1 311	1 310	1 309	1 309
VaR999 átlag	1 978	1 926	1 914	1 901	1 902
VaR95 SE	35	15	10	5	4
VaR99 SE	74	36	27	11	8
VaR999 SE	342	133	95	38	29
VaR95 max - VaR95 min	177	77	52	21	20
VaR99 max - VaR99 min	382	158	129	52	36
VaR999 max - VaR 999 min	1 854	584	510	185	151

Megjegyzés: A VaR-becslést 100-szor végeztünk el, M1–M4 az összetett eloszlás első négy momentumát jelöli.

A leginkább kézenfekvő és leginkább javasolt módszer a felmerülő matematikai nehézségek miatt a Monte-Carlo-módszer, amelynek a segítségével közvetlenül adhatunk becslést adott biztonsági szint mellett a keresett kvantilisra, azaz a VaR-értékre. Ehhez mindössze egy nagyméretű (azaz nagy szimulációszámú) mintát kell generálnunk a teljes veszteségeloszlásra (nyilvánvalóan gyakoriságok és veszteségadatok generálásával), amelyhez elegendő ismernünk az egyedi veszteség- és gyakoriságeloszlásokat. Majd a generált mintából számíthatjuk ki a keresett kvantilist, amely a tőkekövetelményünk becslése lesz. Az eljárás használatakor kritikus a szimulációszám nagysága. A *6. ábrán* és a *3. táblázatban* bemutatjuk, hogy a kis szimulációszám (pl. néhány ezer) hatalmas becslési hibát eredményezhet. Lognormális egyedi veszteségeloszlást feltételezve, láthatjuk a 6. ábrán, hogy mennyire gyors (vagy éppen lassú) a teljes veszteségeloszlás tapasztalati momentumainak a konvergenciája, ahol a becsült értékeket a valódi értékkel vett hányadosában mutatjuk be. A 3. táblázat pedig már a hányadosok szórását és a megfelelő VaR-becslések átlagát és szórását (standard hibáját) is mutatja. Különösen kiemelendő, hogy a táblázatban a szimulációk alacsony száma esetén a VaR standard hibája igen magas lesz, annál magasabb természetesen, minél magasabb a biztonsági szint. Kiemelendő a szabályzó által megkövetelt 99,9% melletti rendkívül nagy standard hiba. Az MC-becslést minden szimulációszám mellett 100-szor ismételtük meg. Egy összehasonlítást is végeztünk a konvergenciasebességekben lognormális és Pareto-veszteségeloszlások esetén, amelyeknek azonos az első két momentuma. Az eredményeket a *7. ábra* és a *4–5. táblázatok* tartalmazzák.

7. ábra

Poisson (λ=4) lognormális (μ=4,11 σ=1) (P-L) és Poisson (λ=4) amerikai Pareto (α=4,9 β=390) (P-P) összetett eloszlások első két momentumának konvergenciája



Megjegyzés: Mindkét veszteségeloszlás esetében a várható érték 100, míg a szórás 130. Az amerikai Pareto-eloszlás eloszlásfüggvénye: $1-\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha}$ ha x > 0, egyébként 0.

4. táblázat

A momentumok és a VaR jellemzőinek alakulása adott szimulációszám mellett, Poisson (λ=4) – lognormális (μ=4,11 σ=1) összetett eloszlás esetén

Összetett eloszláshoz használt szimulációk száma	1000	5000	10 000	50 000	100 000
M1 becsült/igazi átlag	0,9962	0,9987	0,9994	0,9996	0,9998
M2 becsült/igazi átlag	0,9965	0,9949	0,9976	0,9995	1,0000
M1 becsült/igazi SE	0,0252	0,0109	0,0073	0,0039	0,0026
M2 becsült/igazi SE	0,0675	0,0302	0,0204	0,0103	0,0072
VaR95 átlag	1 006	1 009	1 009	1 010	1 010
VaR99 átlag	1 538	1 527	1 530	1 530	1 531
VaR999 átlag	2 680	2 464	2 490	2 504	2 506
VaR95 SE	41	18	13	5	4
VaR99 SE	112	44	28	16	11
VaR999 SE	624	250	161	78	53
VaR95 max - VaR95 min	184	97	70	25	18
VaR99 max - VaR99 min	518	226	144	84	52
VaR999 max - VaR 999 min	2 895	1 361	920	435	280

Megjegyzés: A VaR-becslést 100-szor végeztünk el, M1–M4 az összetett eloszlás első négy momentumát jelöli. A lognormális eloszlás várható értéke 100, szórása 130.

5. táblázat

A momentumok és a VaR jellemzőinek alakulása adott szimulációszám mellett, Poisson (λ=4) – Pareto (α=4,9 β=390) összetett eloszlás esetén

Összetett eloszlás meghatározásához használt szimulácók száma	1000	5000	10 000	50 000	100 000
M1 becsült/igazi átlag	0,9955	0,9998	0,9995	1,0006	1,0004
M2 becsült/igazi átlag	0,9860	0,9986	0,9996	1,0013	1,0006
M1 becsült/igazi SE	0,0241	0,0125	0,0082	0,0038	0,0027
M2 becsült/igazi SE	0,0528	0,0312	0,0212	0,0089	0,0066
VaR95 átlag	1 010	1 021	1 021	1 021	1 021
VaR99 átlag	1 484	1 499	1 502	1 504	1 503
VaR999 átlag	2 399	2 318	2 333	2 331	2 331
VaR95 SE	36	19	13	6	4
VaR99 SE	80	46	34	14	10
VaR999 SE	415	204	126	56	41
VaR95 max - VaR95 min	168	103	86	28	18
VaR99 max - VaR99 min	421	259	164	74	48
VaR999 max - VaR 999 min	2 223	1 224	645	279	207

Megjegyzés: A VaR-ábecslést 100-szor végeztünk el, M1–M4 az összetett eloszlás első négy momentumát jelöli. A Pareto eloszlás várható értéke 100, szórása 130.

Egy másik lehetőség a teljes eloszlás egzakt meghatározása (az „összetevők” ismeretében, s nem csak becslésükkel), majd abból a kvantilis kiszámolása. A teljes eloszlást azonban nem egyszerű meghatározni. Az egyik legismertebb eszköz ehhez a Panjer-rekurzió. Ha a gyakoriságeloszlásunk *(a, b,* 0*)* típusú, és a veszteségeloszlásunk egész értékű(!), akkor Panjer [1981] bizonyította, hogy az *S* teljes veszteség eloszlására teljesül a következő rekurzív képlet:

$$P(S=n)=\sum_{y=1}^{n}\left(a+\frac{by}{n}\right)P(X=y)P(S=n-y) \quad \text{, ahol } n=1, 2,\dots ,$$

és a rekurziót a $P(S = 0) = P(X = 0)$ kezdő lépéssel indíthatjuk, ahol X egy egyedi veszteséget jelöl. Speciálisan, λ paraméterű Poisson-gyakoriságeloszlás esetén $P(S = 0) = e^{-\gamma}$, továbbá

$$P(S=n)=\frac{\lambda}{n}\sum_{y=1}^{n} yP(X=y)P(S=n-y) \quad \text{, ahol } n = 1, 2, \ldots .$$

Mivel a teljes veszteség eloszlását így egzakt módon számolhatjuk, ezért abból azonnal adódik tetszőleges kvantilis- (VaR-) értéke. A módszer alkalmazásának veszélye, hogy numerikus hibák léphetnek fel a rekurzió alkalmazása során (részletesebben tárgyalja ezt a kérdéskört Panjer és Willmot [1986]). Továbbá szemben a korábban javasolt folytonos veszteségeloszlásokkal, a rekurzió azt feltételezi, hogy a veszteségeloszlás is diszkrét. Ugyan Panjer és Willmot [1992] megmutatta, hogy egy f_x folytonos egyedi veszteségeloszláshoz tartozó sűrűségfüggvény esetén a teljes eloszlás f_s sűrűségfüggvénye kielégíti az

$$f_S(x)=P(\eta=1)f_X(x)+\int_0^x\left(a+\frac{by}{x}\right)f_X(y)f_S(x-y)dy$$

Volterra-típusú integrálegyenletet, azonban a gyakorlatban ez nem a legegyszerűbben használható eszköz. Hiszen ennek az eredménynek a használata esetén meg kell oldani az integrálegyenletet, amely számos újabb numerikus kérdést vet fel, komoly szakértelmet igényel (szemben például a fent leírt egyszerű Monte-Carlo-közelítéssel). Ezért, ha mégis meg akarjuk határozni a teljes veszteségeloszlást, s nem csak a kvantilisra van szükségünk, akkor szerencsésebb a fenti integrálegyenlet helyett a Panjer-féle rekurziós képletet használni még folytonos eloszlások esetén is(!): ehhez azonban a folytonos veszteségeloszlás diszkretizálása szükséges, hogy ennélfogva alkalmazható legyen a szóban forgó rekurziós képlet. A diszkretizálást, azaz a folytonos eloszlás diszkrét eloszlással való közelítését (helyettesítését) több módon végezhetjük el, ennek tárgyalásától itt eltekintünk. Az érdeklődő olvasó Klugman, Panjer és Willmot [2004] könyvében találhatja meg a probléma részletes tárgyalását.

Az összetett eloszlás közelítésére egy további, szintén nem triviális mód vezet az eloszlás momentumgeneráló és karakterisztikus függvényének meghatározásán keresztül. Ehhez vegyük észre: egyszerűen levezethető, hogy a teljes eloszlás momentumgeneráló függvénye meghatározható a gyakoriság generátorfüggvénye és az egyedi veszteségek momentumgeneráló függvénye segítségével (amennyiben léteznek):

$$G_S(y)=g_\eta\left(G_X(y)\right) \quad , \quad y\in R \quad ,$$

ahol G_x és G_s az egyedi, illetve a teljes veszteség eloszlásainak momentumgeneráló függvényét jelöli, míg g_η a gyakoriságeloszlás generátorfüggvénye. Ugyanilyen összefüggés adódik karakterisztikus függvények esetére is. Utóbbi előnye, hogy mindig létezik. Ha a fenti módon meghatároztuk a teljes veszteség karakterisztikus függvényét, akkor például a gyors Fourier-transzformáció (Fast Fourier Transform – FFT) módszerét használhatjuk annak érdekében, hogy a karakterisztikus függvényből megkapjuk (becsüljük) a szóban forgó eloszlást (sűrűségfüggvényt). Azonban ez az eljárás is lényegesen több numerikus buktatót tartalmaz, mint az elsőként javasolt Monte-Carlo-módszer.

Végezetül hasznos megemlítenünk, hogy a teljes eloszlás egyes jellemzőinek a meghatározásához nem kell ismernünk a teljes veszteség eloszlását. A teljes veszteség momentumait például könnyen megadhatjuk az egyedi veszteségek és a gyakoriság momentumaival. Itt most az első kettő momentumra ismertetjük csak az összefüggéseket:

$$ES = EX \cdot E\eta,$$

$$D^2S = E\eta \cdot D^2X + D^2\,\eta \cdot (EX)^2,$$

ahol E és D^2 rendre várható értéket és varianciát (szórásnégyzetet) jelöl.

Az ebben a részben tárgyalt módszerek és általában a működési kockázat módszertanának részletes áttekintését tartalmazza Panjer (2006).

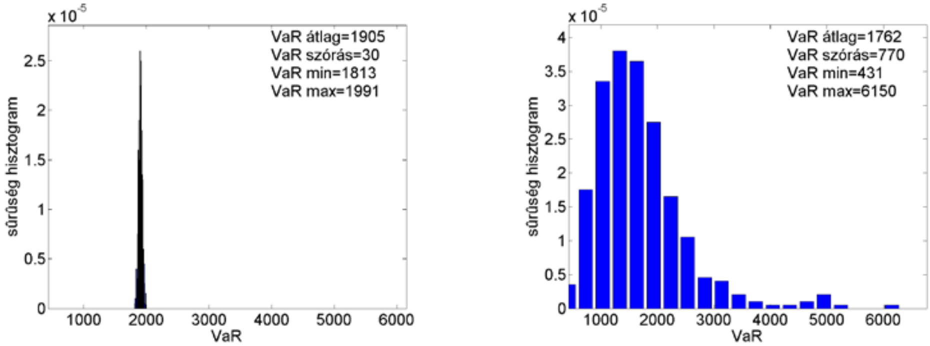
3. Néhány további szimulációs példa

Ebben a részben néhány újabb példát mutatunk be. Ezek közös eleme: azt kívánjuk vizsgálni, hogy egyes döntéseinknek és a modellépítés közben hozott döntési hibáknak milyen következményei lesznek a tőkekövetelmény becslésére. A vizsgálatokban a gyakoriság minden esetben Poisson-eloszlású.

Az első példában azt vizsgáljuk, hogy mi a következménye a kis mintán végzett becsléseknek. Ehhez lognormális egyedi veszteségeket tekintettünk. Feltételeztük, hogy az intézmény 5 éves idősorral rendelkezik, és átlagosan évi 4 eseménye van, amit Poisson (λ = 4) paraméterű eloszlással modelleztük. Ez lényegében megfelelhet egy olyan szituációnak, ahol a kockázati mátrix egy adott (üzletág-veszteségkategória) elemében külön számolunk (összevonás nélkül) működési kockázatot. A *8. ábra* mutatja a kapott eredményeket. Az ábra bal oldalán a 99,9%-os konfidenciaszint melletti VaR-becslések hisztogramját mutatjuk be, annak feltételezése mellett, hogy ismerjük a fent említett pontos paramétereket és így az aggregált eloszlás VaR-értékeit Monte-Carlo-szimulációval becsültük, ahol a szimulációk száma 100 000, és a becsléseket 400-szor ismételtük meg. A jobb oldali ábra szintén a 99,9%-os konfidenciaszint melletti VaR-becslések hisztogramját mutatja, azonban ez esetben a 400 becslést úgy végeztük el, hogy minden esetben generáltunk egy 5 éves időszaknak megfelelő mintát, és először a paramétereket ebből a mintából becsültük vissza, majd azokkal elvégeztük a VaR Monte-Carlo-becslését, a szimulációszám ismét 100 000 volt (becslésenként). Utóbbi esetben a Poisson-eloszlás paraméterét egy 5 elemű, míg a lognormális eloszlás paramétereit egy átlagosan 4 x 5 = 20 elemű mintából kellett megbecsülni. Összefoglalva tehát: míg a bal oldalon ismertük az eredeti paramétereket, s így a VaR-becslések hibái csak a Monte-Carlo-eljárásból adódnak, addig a jobb oldalon paraméterbecslési hiba és a Monte-Carlo hibája együttesen okozza a VaR-becslések hibáját. Az ábrákon látható jellemzőkből könnyen kiszámítható, hogy a becslési hiba következtében az eloszlás a becslési hibától mentes esethez képest egy százszor akkora intervallumon terül el. A Monte-Carlo-módszer szimulációs hibája tehát jelentéktelenné válik a becslési hibához képest.

8. ábra

A VaR-becslés paraméterbecslési hibák miatti hibája

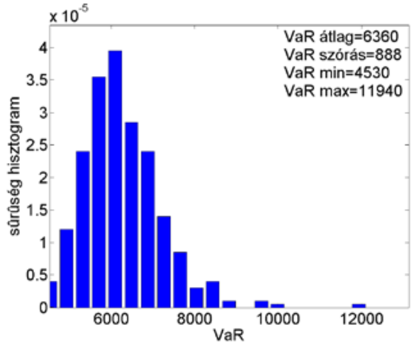


Megjegyzés: A jobb oldalon paraméterek becslése nélkül a valós paraméterek ismeretében, bal oldalon azzal együtt, 5 éves idősor mellett, gyakoriságeloszlás Poisson (λ=4), veszteségeloszlás lognormális (μ=4,26 σ=0,83). VaR becslések száma 400, minden VaR becslésnél a Monte-Carlo-szimulációk száma 100000.

Ez a (szándékosan szélsőséges) példa arra figyelmeztet, hogy ha túl kevés minta található egy létrehozott veszteségosztályban, akkor a gyakoriság- és veszteségeloszlások paramétereinek becslésében olyan nagy lesz a bizonytalanság, hogy azok lényegében használhatatlan VaR-becsléseket eredményezhetnek. Ha a pénzintézetben a fentihez hasonló vizsgálatokat végeznek, akkor ezek segítségével könnyebben el lehet dönteni, hogy milyen nagy veszteségosztályokat érdemes létrehozni az összevonások segítségével. (Természetesen a mintanagyság ilyen módon való növelése csak szakmailag megalapozott összevonásokkal képzelhető el. Hiszen egyrészt fontos, hogy a létrejövő osztályok jól leírhatóak legyenek a használt modellekkel, az azokban szereplő eloszlásokkal, másrészt természetesen pénzügyi, működési szempontból sem elfogadható bármilyen „távoli" kategóriák összevonása.) Egy összevonások utáni lehetséges állapotot mutat a *9. ábra*. Itt feltételeztük, hogy üzletáganként összevonás történt, így az előbb vizsgált éves átlagos 4 esemény helyett 32 eseménnyel számoltunk, azaz ennyi volt a Poisson eloszlású gyakoriság paramétere. Ugyan így is nagy a VaR-becslés standard hibája, ám az relatív értelemben lényegesen kisebb, mint a 8. ábrán, ahol nem volt összevonás.

9. ábra

99,9%-os VaR-becslések veszteségkategóriánkénti bontásban



Megjegyzés: Gyakoriságeloszlás: Poisson (λ=32), veszteségeloszlás: lognormális (μ=4,26 σ=0,83). VaR-becslések száma 400, minden VaR-becslésnél a Monte-Carlo-szimulációk száma 100-000.

Itt azt is fontosnak tartjuk megjegyezni, hogy a nemrégiben több hazai hitelintézet által közösen kialakított működési kockázati adatbázis (Magyar Működési Kockázati Adatbázis, HunOR) adatainak bevonása az intézmény saját mintájába – ha alkalmas módszerrel, körültekintően végzik –, újabb lehetőséget jelent a fent említett becslési hibák csökkentésére. Megjegyzendő azonban, hogy a HunOR feltöltése 2007 első negyedévében kezdődött, visszamenőleg nem szerepeltet adatokat, így ennek eredményes használatához is meg kell várni az adatbázis további bővülését. A használathoz részletesen át kell gondolni, hogy milyen módszerrel (pl. bayesi megközelítés) történjen a paraméterek becslése. Erre a kérdésre jelen írásban terjedelmi okok miatt nem térünk ki részletesen, mint ahogy az itt felmerülő skálázási problémákat sem érintjük.

A második példában azt vizsgáljuk, hogy egyes modellszelekciós kérdéseknek mekkora a hatása a tőkekövetelményre. Poisson-eloszlású gyakoriság mellett azt feltételezzük, hogy a valódi eloszlása a veszteségeknek lognormális. Ezen feltétel mellett végeztük el a lognormális, exponenciális és Pareto-eloszlások illesztését a veszteségadatokra, és kiszámoltuk a különböző teljes eloszlásokhoz tartozó VaR-t. Azt lehet látni az összehasonlításunk segítségével, hogy mekkora hibát követnénk el a tőkekövetelmény becslésénél, ha nem a jó eloszláscsaládot választanánk a veszteségek leírásához a megfelelő statisztikai tesztek és eljárások segítségével. Az eredményeket a *6. táblázat* mutatja. Látható, hogy exponenciális eloszlás választása esetén különösen nagy az eltérés a valódi VaR-tól, míg Pareto esetén ugyan kisebb, ám így is számottevő az eltérés, különösen nagy biztonsági szintek mellett.

6. táblázat

Összetett Poisson (λ=30) eloszlások VaR-becsléseinek jellemzői

Káreloszlás	Lognormális	Exponenciális	Amerikai Pareto
VaR95 átlag	4610	4352	4601
VaR99 átlag	5578	5017	5503
VaR999 átlag	7044	5829	6799
VaR95 SE	8	6	8
VaR99 SE	18	12	18
VaR999 SE	72	33	58

Megjegyzés: Szimulációszám 100000, VaR-becslések száma 400. A veszteségeloszlások várható értéke 100, szórása exponenciális eloszlás esetén 100, más esetben 130.

Végül a harmadik példában azt vizsgáljuk, hogy a VaR, azaz a tőkekövetelmény értéke mennyire érzékeny a paraméterek választására, esetleg rossz választására, becslésére. Ez nem csak abból adódhat, hogy valamelyik pontbecslési eljárás során becsléseinknek hibája van, ahogy azt ebben a részben az első példában már tárgyaltuk. Számos más ok vezethet oda, hogy rossz paramétereket használunk. Korábban említettük, hogy bizonyos korrekciós lépéseket szükséges lehet elvégezni az eloszlásokon. Változhat az eloszlás becsült paramétere például infláció vagy növekedés következtében, de említettük már, hogy adatszűrések, rögzítési limitek figyelembe vétele is ilyen hatással járhat, végül emlékezzünk arra is, hogy esetenként belső szakértői becslésre lehet szükség a kis mintaméret miatt, amely szintén felveti a paraméterekre való érzékenység kérdését.

Nagyon egyszerű módon vizsgájuk a szóban forgó érzékenység kérdését. Ehhez az egyszerűség kedvéért ismét felhasználjuk a 6. táblázatban kapott eredményeket. Ugyanis most feltételeztük, hogy az intézmény hibásan alulbecsli mind a működési veszteségeinek a számát (Poisson-gyakoriság, λ=30), mind a káreloszlás várható értékét (100). Ezzel szemben tegyük fel, hogy a veszteségek bekövetkeztének valódi gyakorisága 40, várható értéke 110. Ilyen (és ekkora) hiba adódhat például rossz szakértői véleményekből, vagy egyes hatások (infláció, növekedés) figyelmen kívül hagyásából. A vizsgálatokat különböző biztonsági szintek mellett lognormális, exponencális és Pareto-veszteségeloszlásokra is elvégeztük A 6. táblázat tehát az alulbecsült eseteket, a *7. táblázat* pedig a valódi paraméterek mellett kapott szimulációs eredményeket tartalmazza. Jól látható a két táblázat összevetésével, hogy ez a becslési hiba a kockázatok akár 30–40%-os alulbecsléséhez vezetett. Jegyezzük meg, hogy az összetett eloszlások momentumainak a szóban forgó hibából adódó változását könnyen számolhatjuk az előző rész végén az összetett eloszlások momentumaira vonatkozó összefüggések segítségével.

7. táblázat

Összetett Poisson (λ=40) eloszlások VaR becsléseinek jellemzői

Káreloszlás	Lognormális	Exponenciális	Amerikai Pareto
VaR95 átlag	6307	6108	6294
VaR99 átlag	7354	6935	7257
VaR999 átlag	8812	7933	8474
VaR95 SE	9	8	9
VaR99 SE	19	15	17
VaR999 SE	62	40	52

Megjegyzés: Szimulációszám 100000, VaR-becslések száma 400. A veszteségeloszlások várható értéke 110, szórása exponenciális eloszlás esetén 110, más esetben 130.

4. Konklúziók

Cikkünkben összefoglaltuk a Loss Distribution Approach (LDA) módszertanának elméleti alapjait, és részletesen tárgyaltuk azt, hogy a pénzintézeteknek milyen feladatokat kell elvégezniük az alkalmazás során. Ehhez áttekintettük a szükséges statisztikai módszertan lényeges eszközeit.

Nem titkolt célunk volt az is, hogy felhívjuk az olvasó figyelmét több olyan kritikus kérdésre, amelyek döntően és lényegesen befolyásolják a tőkekövetelmény számolását vagy becslését. Ezért ezeket részletesebben tárgyaltuk, míg a cikk terjedelme nem tette lehetővé, hogy a standard statisztikai eszközöket, mélyebb valószínűség-számítási alapokat részletesen bemutassuk.

Számos szimulációs példával igyekeztünk az említett, szerintünk fontos problémákat ismertetni. Így láthattuk, hogy nagyon fontos a szerepe a megfelelő veszteségosztályok rögzítésének esetleges összevonásokkal, hiszen a minta mérete, a pontbecslések hibái hatalmas becslési hibát eredményezhetnek a tőkekövetelményeknél, különösen a szabályzó által megkövetelt, magas biztonsági szint mellett. Említettük, hogy a hitelintézetek által közösen kialakított működési kockázati adatbázis is segítheti a munkánkat.

Láthattuk, hogy hasonlóan lényeges a körültekintő modellszelekció elvégzése, továbbá a gyakoriság- és veszteségeloszlások paramétereinek alulbecslése, vagy rossz (elmaradt) korrekciója (infláció, növekedés vagy éppen különböző adatrögzítési okok miatt) szintén komoly hibát eredményezhet a tőkekövetelmény becslésénél.

Természetesen az egyes statisztikai eljárások alkalmazását is rendre körültekintően kell elvégezni, ahogy azt más alkalmazásokban is tennénk. Itt többek között tárgyaltuk, hogy a Monte-Carlo-becslések esetén a szimulációk száma kritikus kérdés. Viszont tőkekövetelményt nem kell percenként kalkulálni, így az esetleges futási időkben tapasztalható növekedések nem jelentenek valódi problémát.

Jelen cikkben viszont nem tértünk ki néhány egyéb elméleti kérdésre, amelyek napjainkban az LDA kapcsán felmerülnek. Csak röviden utaltunk például arra, hogy a pénzintézet teljes működési kockázatának meghatározása az egyes veszteségosztályokra (vagy akár a működési kockázati mátrix minden elemére) számított tőkekövetelmények összeadásával több elméleti kérdést vet fel. Ezek a kérdések összefüggnek a kockázat szubadditivitásával vagy a szubadditivitás hiányával, ahogy arra utaltunk röviden. Részben idekapcsolódik a veszteségek megosztásának kérdése is, valamint a választott megosztási problémákkal. Ezekre egy tervezett újabb tanulmányban mi is vissza kívánunk térni. Azonban az LDA standard alkalmazásához ezen kérdések mélyebb ismerete nem szükséges. Nem tértünk ki továbbá részletesen a külső adatbázisok (pl. HunOR) megfelelő bevonására és alkalmazására a megbízhatóbb becslések érdekében.

Végezetül, hangsúlyozni kívánjuk, hogy az áttekintett alkalmazási problémákkal egyáltalán nem azt akartuk sugallni, hogy az AMA, különösképpen az LDA módszertanát nem javasolnánk, s inkább a szabályzó által engedélyezett egyéb, kevésbé szofisztikált módszertanra szavazunk. Sőt, az LDA előnye éppen abban áll, hogy a veszteségek eloszlását – különösen tekintettel a farokeloszlására – is figyelembe veszi, azok alapján alakít ki tőkekövetelményt, míg más módszerek teljesen érzéketlenek az eloszlás jellegére, így esetleg teljesen figyelmen kívül hagyják a bizonytalanságból eredő valódi kockázatot. Ennek a szempontnak az érvényesülését pedig elengedhetetlen tartjuk egy modern pénzügyi megközelítésben. Azt is láttuk, hogy körültekintő eljárással számos becslési hibát csökkenthetünk. Mindemellett szükségesnek tartjuk természetesen az LDA-val kapcsolatos elméleti és alkalmazási problémákkal való további foglalkozást is.

Irodalomjegyzék

A működési kockázat kezeléséről és tőkekövetelményéről, 200/2007. (VII. 30.) Korm. r., *Magyar Közlöny*, 101., 2007. júl. 30., http://www.magyarkozlony.hu/nkonline/MKPDF/hiteles/MK07101.pdf

Acerbi, C. [2004]: Coherent Representations of Subjective Risk Aversion, in Giorgio Szegö (ed.): Risk Measures for the 21st Century, Wiley, New York.

Basel Committee on Banking Supervision [2001]: Consultative Document, Operational Risk, Supporting Document to the New Basel Capital Accord, Issued for comment by 31 May 2001., www.bis.org.

Basel Committee on Banking Supervision [2003]: *Consultative Document, The New Basel Capital Accord*, Issued for comment by 31 July 2003., www.bis.org.

Committee of European Banking Supervisors [2006]: Quantitative Impact Study 5, Overview on the Results of the EU countries, június 16., 2006., http://www.c-ebs.org/qis5.htm.

Delbaen, F. [2000]: Coherent risk measures on general probability spaces, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich

Directive 2006/48/EC of the European Parliament and of the Council of 14 June 2006 relating to the taking up and pursuit of the business of credit institutions (recast), *Official Journal of the European Union*, 30.6.2006, L 177/1, http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/site/en/oj/2006/l_177/l_17720060630en00010200.pdf.

Directive 2006/49/EC of the European Parliament and the Council of 14 June 2006 on the capital adequacy of investment firms and credit institutions (recast), *Official Journal of the European Union*, 30.6.2006, L 177/201, http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/site/en/oj/2006/l_177/l_17720060630en02010255.pdf.

Frachot, A.–P. Georges–T. Roncalli [2001]: Loss Distribution Approach for operational risk, Crédit Lyonnais, http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/lda.pdf.

Frachot, A.–T. Roncalli–E. Salomon [2004]: The Correlation Problem in Operational Risk, Crédit Lyonnais, http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/lda-correlations.pdf.

Gáll, J.–Pap Gy. (2005): Hasznosságalapú portfólió-menedzsment, jegyzet, Mobidiak-Debreceni Egyetem, http://mobidiak.inf.unideb.hu; http://iam035.inf.unideb.hu/mobidiak/listdocument.mobi?id=50

Klugman, S., Panjer, H.–Willmot G. [2004]: Loss Models, From Data to Decision, Wiley, Hoboken, New Jersey.

Panjer, H. [1981]: Recursive evaluation of compound distributions, *Astin Bulletin*, 12., 22–26. o.

Panjer, H. [2006]: Operational Risk, Modeling Analytics, Wiley, Hoboken, New Jersey.

Panjer, H.–Willmot G. [1986]: Computational Aspect of Recursive Evaluation of Compound Distributions, Insurance: Mathematics and Economics, 5, 113–116. o.

Panjer, H.–G. Willmot [1992]: Insurance Risk Models, Chicago: Society of Actuaries.

Validációs kéziköny, Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete [2006], http://www.pszaf.hu/engine.aspx?page=pszafhu_validacios&switch-content=pszafhu_validacios_20060331_3&switch-zone=Content%20Zone%204&switch-render-mode=full