Czene Anna–Lukács Miklós

Eszközárbuborékok matematikai modellezése[1]

Dolgozatunk célja az eszközárbuborékok matematikai modellezési lehetőségének a vizsgálata. A jelenlegi szakirodalom két eltérő megközelítésből áll. A Philip Protter nevéhez köthető martingálelméleti megközelítésben a részvényárfolyam-diffúzió, míg az ún. JLS-modellben a trend együtthatója felelős a buborék kialakulásáért. Ezen modellek célja a buborék viselkedésének matematikai leírása a közgazdasági motivációk nélkül. Ezzel szemben a mi modellünkben pszichológiai tényezők hatására alakul ki az ún. csordaviselkedés, amelynek a hatására az árfolyamok irreális növekedést mutatnak. A buborék kidurranása pedig a JLS-modellhez hasonlóan egy ugrófolyamat segítségével valósul meg. A modellt historikus adatokon is vizsgáltuk.

1. Bevezető

„Valaki emlékeztetett a minap,
hogy egykor azt mondtam: a kapzsiság jó dolog,
hát ma már törvényes is...”
Gordon Gekko (*Tőzsdecápák II.*)

Közgazdasági körökben sokszor használják a kifejezést: eszközárbuborék. De a valóságban vajon mit is jelent ez? A kérdés megválaszolására tett kísérletek számos további kérdéshez juttattak el minket. Mikor mondhatjuk azt, hogy épp buborékban vagyunk? És ha valóban buborékban vagyunk, szabaduljunk meg az eszköztől vagy tartsuk, még bízva a további áremelkedésben? Mi az optimális kiszállási stratégia? Mi okozza ezt a szélsőséges piaci viselkedést? Létezik-e valamilyen módszer, amellyel a szabályozó szervek meggátolhatják a buborék kialakulását? Ha pedig már kialakult a buborék, akkor hogyan kerüljük el a gyors piaci zuhanást? Továbbá lényeges kérdés, hogy modellezhető-e ez a folyamat. Ehhez viszont fontos megértenünk a kialakulása mögött meghúzódó motivációkat.

Ezekre a kérdésekre a matematikusok és a közgazdászok régóta keresik a megfelelő válaszokat. Míg a matematikai megközelítés azt vizsgálja, hogyan alakul ki az árfolyambuborék, addig a közgazdaságtan elsősorban azt, hogy miért alakul ki.

1 Ezúton szeretnénk köszönetet mondani *dr. Bihary Zsoltnak*, akinek a javaslatára az ő modelljét is vizsgálat alá vettük. A heti rendszerességgel tartott konzultációk során pedig számos ötlettel és instrukcióval látott el a dolgozat megírásához.
Köszönettel tartozunk *dr. Márkus Lászlónak* is, aki a témakör megértéséhez elengedhetetlenül fontos alapokat tanította nekünk, és felkeltette érdeklődésünket a pénzügyi matematika iránt. Továbbá ő hívta fel figyelmünket a témára, és a konzultációk is segítették a dolgozat elkészülését.
A szerzők az itt közölt tanulmány eredeti, hosszabb változatát benyújtották a BÉT 2012/2013-as Kochmeister-díjának pályázatára.

A történelmi példákból is egyértelműen kiderül, hogy a kérdésfelvetés mennyire releváns. A korszaktól, a piactól és a terméktől függetlenül kialakulhatnak buborékok, amelyek aztán hirtelen árfolyamzuhanással érnek véget. Elég csak a 2000-es évek elején kialakult ingatlanár-buborékra gondolni, amely hozzájárult a globális gazdasági világválság keletkezéséhez. Ez a válság arra is felhívta a figyelmet, hogy a globális piacok komplexitása, a hatalmas tőkeáttétel és a bonyolult származtatott termékek miatt a szélsőséges viselkedéseknek komoly következményei lehetnek. A piaci krachok gyorsabban zajlanak le és az egész világgazdaságra hatással vannak, tehát a kérdés napjainkban relevánsabb, mint bármikor.

Az első és leggyakrabban idézett példa buborék kialakulására a *holland tulipánhagymamánia* (1634–1637). Bár nehéz meghatározni egy tulipánhagyma tényleges (fundamentális) értékét, minden bizonnyal nevezhetjük irracionálisnak, ha egy átlagos árú hagyma néhány év múlva egy amszterdami ház árával egyenértékű. A meredek emelkedés mögött nemcsak gazdasági tényezők álltak, hanem spekulációs szándékok is. A vásárlókat nem a valós érték motiválta, hanem a további árfolyam-emelkedés lehetősége. A kor egyik legfejlettebb piacán már megjelentek a napjainkban elterjedt határidős és egyéb származtatott ügyletek, amelyek katalizátorként szolgálnak egy pénzügyi buborék kialakulásához. A gazdaságtörténet az esetet mániaként, a befektetők őrült, irracionális viselkedéseként könyveli el. A pozitív vélekedés 1637-ben megváltozott, és az árfolyamok zuhanni kezdtek, ennek hatására az összes hagymatípus értéke korábbi árának 1–5 %-ára esett vissza. Ezt követően a történelem még számtalanszor megismételte önmagát, komoly veszteségeket okozva a későn érkező befektetőknek.

A számos történeti példából arra következtethetünk, hogy az esemény kialakulásáért felelős tényezők állandóan jelen vannak, hiszen ezek emberi tulajdonságok. Egy buborék kialakulásának legfőbb oka a spekuláció. Az emberek azért veszik meg a terméket, mert nem akarnak lemaradni a gyors áremelkedésről. A kapzsiság és a vágy a hirtelen meggazdagodásra az emberi természetből fakad. Ez a fajta magatartás kollektíven igaz a befektetőkre, ezért alakul ki az úgynevezett csordaszellem. Pénzügyi elemzések során ezzel a tényezővel számolnunk kell.

1.1. A cikk felépítése

A témakör első fontosabb kérdése: hogyan definiálható maga az eszközárbuborék? Sajnos, a szakértők sem adnak egységes választ, de annyit mondhatunk, hogy a buborék a piacon kialakult ár és a fundamentális ár különbsége. A piaci ár többé-kevésbé egyértelmű, de a fair ár meghatározása komoly problémát okozhat. Egy IT-cég részvényeinek vagy a Bitcoin digitális fizetőeszköz fundamentális értékének meghatározása még a szakértőknek is nehézségeket okoz, maximum széles intervallumokat tudnak adni. Ezért a buborékok elemzésével foglalkozó közgazdászok és matematikusok inkább a viselkedés jellegét vizsgálják, és abból próbálnak következtetéseket levonni. Első megközelítésben az empirikus tapasztalatok alapján annyit állíthatunk, hogy a buborékokat egy hosszabb távú növekedés jellemzi, aminek egy hirtelen zuhanás vet véget. Ezért gyakran csak utólag állíthatjuk, hogy buborék volt a piacon, hiszen sokszor nehéz eldönteni, hogy egy piaci anomáliáról és indokolatlan optimizmusról van-e szó, vagy valós, fundamentális értéknövekedésről.

A közgazdászok már régóta foglalkoznak a témakörrel, de csupán az elmúlt tíz évben születtek matematikai modellek a buborékfolyamatok leírására. A kérdéskör jobb megértése érdekében először a szakirodalom álláspontját mutatjuk be, ezért a *2.* és a *3. fejezetben* a témában releváns szakmai értekezések főbb gondolatait összegezzük. Mindkét megközelítési mód alapja egy Ito-folyamat, de eltérő tulajdonságokat helyeznek előtérbe. A 2. fejezetben a *Philip Protter* nevéhez fűződő elméletet mutatunk be, ahol a buborék kialakulásának lehetőségét a termék diffúziós együtthatója biztosítja. A 3. fejezetben az irodalom egy másik ágát tanulmányozzuk, amely szerint a trend együtthatója felelős az eseményért. Az utóbbi elképzelés legjelentősebb képviselője *Didier Sornette*.

Arra a kérdésre keressük a választ, hogy vajon a buborék kialakulásáért felelős kollektív viselkedés leírható-e matematikai modellekkel. Adható-e olyan módszer, amely kimutatja a buborék létezését egy adott termék árfolyamában? Esetleg adhatunk-e módszert válságközeli bekövetkezésének előrejelzésre? A 2. és a 3. fejezetben bemutatott két megközelítésmód sok mindenben eltér egymástól, de közös bennük, hogy a viselkedés tulajdonságait írják le matematikai modellekkel. Majd az így kapott modellt felhasználva, a 2. fejezetben egy eljárást mutatnak be, amellyel ki tudják mutatni, hogy az adott termék árfolyamában van-e épp buborék. A 3. fejezetben pedig a matematikai modellre alapozva egy válság-előrejelző indikátort határoznak meg, amelynek a segítségével egy kereskedési stratégia is megfogalmazható.

A két említett modellel ellentétben a *4. fejezetben* egy saját buborékmodellt mutatunk be, amely – ellenben a szakirodalommal – nem egyszerűen a viselkedés tulajdonságait próbálja leírni, hanem a buborék kialakulása mögött meghúzódó pszichológiai tényezőket is beépíti az árfolyam alakulásába. A kiindulási pont dr. Bihary Zsolt speciális részvényárfolyam-dinamikája, amelyben a drift és volatilitás együtthatók a múltbeli hozamoknak egy exponenciális mozgóátlagától függnek.

A fejezet második felében empirikusan vizsgáljuk a 2007-es évhez köthető ingatlanár-buborék kipukkanását. A tapasztalatok alapján pedig állításokat fogalmazunk meg a modell paraméterei és a buborékok kapcsolatai között. Ezek a következtetések óvatosabbak annál, semhogy kereskedési stratégiák alapjául szolgáljanak; de buborékok esetén figyelmeztető indikátorként szolgálhatnak a szabályozás számára.

Az *5. fejezetben* különböző szempontok szerint összehasonlítjuk a három modellt, majd levonjuk a következtetéseket.

2. Martingálelméleti megközelítés

Ebben a fejezetben a szakirodalom azon ágát tanulmányozzuk, amelyben a buborék kialakulásáért a volatilitás együtthatója a felelős. A kérdés legjelentősebb kutatója Philip Protter, a Columbia Egyetem professzora, akinek az elmúlt 10 évben számos cikke jelent meg a témában. Ezek közül a legjelentősebb a 2012-ben publikált *A Mathematical Theory of Financial Bubbles* című írása[2], amely összegzi a legjelentősebb gondolatait a buborék kialakulásáról.

2 Protter, P. [2012]: A mathematical theory of financial bubbles (http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2115895)

A buborék matematikai meghatározása előtt definiálnunk kell egy kockázatos pénzügyi eszközt, amelynek jelenlegi értéke S_t. Az elemzést $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{P})$ mértéktér felett végezzük, ahol az $F=(F_t)_{t\geq 0}$ a természetes filtráció. Ez a folyamat egy τ megállási időben megszűnik egy $\Delta \geq 0 \in \mathcal{F}_\tau$ kifizetéssel, addig pedig osztalékot fizet, amit egy $D_t \geq 0$ folyamattal írhatunk le. Protter feltételezése szerint ez a folyamat és a korábban definiált S_t is càdlàg szemimartingál. Ezeket az információkat felhasználva, felírhatjuk a vagyonfolyamatot (W_t):

$$W_t = S_t \mathbb{1}_{\tau > t} + B_t \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{B_u} dD_u + \frac{B_t}{B_\tau} \Delta \mathbb{1}_{\tau \leq t}$$

ahol $B_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right)$, és r_t a kockázatmentes kamatláb folyamat.

A kockázatos pénzügyi eszköz fundamentális ára egy *t* időpontban megegyezik a termék hátralévő kifizetéseinek diszkontált, kockázatsemleges mérték ($\mathbb{Q}$) szerint vett feltételes várható értékével[3]:

$$S_t^* = E_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^\tau \frac{1}{B_u} dD_u + \frac{\Delta}{B_\tau} \mathbb{1}_{\tau \leq T^*} | \mathcal{F}_t \right] B_t.$$

A buborékot ebben az esetben a piaci ár és a fundamentális ár különbségeként defniálhatjuk:

$$\beta_t = S_t - S_t^*.$$

Protter első megállapítása az volt, hogy a részvény árfolyama mindig meghaladja a fundamentális árát. Ebből következik, hogy minden időpillanatban kialakulhat buborék. A τ jellege szerint a buborékok három osztályba sorolhatók:

1) β_t egy lokális martingál és egyenletesen integrálható, ha $P(\tau=\infty)>0$.
2) β_t egy lokális martingál, de nem egyenletesen integrálható, ha nem korlátos, de $P(\tau<\infty)=1$.
3) β_t egy szigorúan lokális martingál[4], ha τ egy korlátos megállási idő.

A kutatás szempontjából számunkra a harmadik típus a releváns. Tehát a buborék szigorúan lokális martingál, és mivel a fundamentális ár is lokális martingál, ebből következik, hogy a részvényárfolyam-folyamat is szigorúan lokális martingál.

Az egyik legfontosabb kérdés, hogy az előbb vázolt elképzelést hogyan tudjuk hasznosítani a gyakorlatban, vagyis hogyan állapítható meg egy részvényárfolyam-folyamatról, hogy szigorúan lokális martingál vagy sem. Az egyszerűbb modell kedvéért az eszköz ne fizessen osztalékot, és a kockázatmentes kamatláb legyen konstans 0. Ekkor az S_t legyen a következő differenciálegyenlet egyértelmű, erős megoldása:

$$dS_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t,$$

ahol *W* a standard Brown-mozgás.

3 Az elemzést egyelőre teljes piacokra szorítjuk, ezért a második pénzügyi alaptörvény szerint a $\mathbb{Q}$ ELMM egyértelmű.

4 Minden lokális martingál, ami nem martingál, szigorúan lokális martingál.

Ezt a Girsanov-tétel segítségével módosíthatjuk a következő egyszerűbb alakra:

$dS_t = \sigma(S_t)dW_t^Q.$

Ekkor bebizonyítható, hogy a differenciálegyenlet megoldásaként definiált S_t folyamat akkor és csak akkor szigorúan lokális martingál, ha $\sigma(S_t)$ teljesíti a következő feltételt:

$$\int_\epsilon^\infty \frac{x}{\sigma(x)^2}dx < \infty,$$

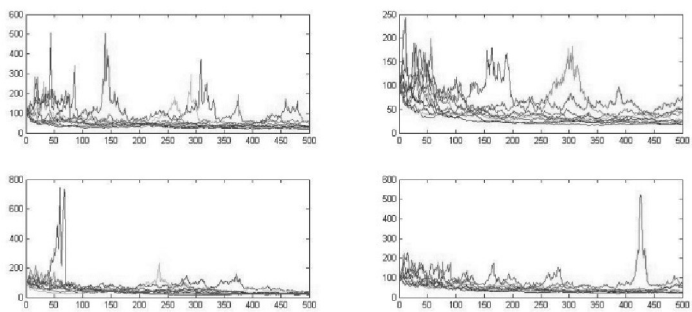
ahol $\epsilon>0$.

A tétel alkalmazása során problémát jelent, hogy nem ismerjük az $x \mapsto \sigma(x)$ függvényt minden *x*-re, ahol most az *x* a részvényárfolyamatot jelenti. Mivel csak a megfigyelt adatok állnak rendelkezésünkre, ahol természetesen az *x* nem vett fel minden értéket, a $\sigma(x)$ becslése piaci adatokból nem triviális feladat. Ezt a nehézséget a Reproducing Kernel Hilbert Spaces elméletének segítségével sikerült kiküszöbölni.

A legjobb példa folytonos szigorúan lokális martingálra az inverz Bessel-folyamat, amelyet a $d\beta_t = -\sigma_0 \cdot \beta_t^2 dB_t$ differenciálegyenlet szimulálásával állítottuk elő a megfigyelésekhez, ahol $\beta_t = \frac{1}{V_t}$, és V_t az 1 dimenziós Bessel-folyamat.

1. ábra

Inverz Bessel-folyamatok



Az ábrán jól látható, hogy milyen gyorsan tudnak emelkedni, majd bezuhanni az árfolyamok. Ezt a viselkedést a buborékoktól is elvárjuk. A történeti tapasztalatok szerint viszont általában az emelkedés jóval lassabb, mint a krach, ami gyakran néhány nap alatt lezajlik (mintha az árfolyam ugrana egyet negatív irányba). Ez felveti a kérdést: valóban jól írja-e le ez a fajta megközelítés a buborékok jellegét? A következő fejezetben bemutatunk egy olyan modellt, amely eleget tesz a hirtelen zuhanás elvárásának, mivel a krach egy ugrófolyamat segítségével valósul meg.

3. A piaci összeomlás rekonstruálása egy ugrófolyamat segítségével

Ebben a fejezetben egy teljesen más megközelítést, az úgynevezett Johansen–Ledoit–Sornette- (JLS-) buborékmodellt mutatjuk be.[5]

3.1. A JLS-modell

A 2. Martingálelméleti megközelítés c. fejezetben bemutatott modellekkel ellentétben, ebben az esetben a buborék kialakulásának lehetősége a trend együtthatójához köthető, a diffúziós együttható pedig egyszerű konstans.

Ez a modell képes a buborék kialakulását és az azt követő válságot is leírni úgy, hogy ún. noise traderekkel feltornázzák egy részvényárfolyam árát olyan magasra, hogy zuhanással végződjön. A bevezetőben már említettük a folyamat mögött meghúzódó motivációkat.

A részvényárfolyam-dinamikában a drift együttható növekedésének hatására az árfolyam az exponenciálisnál gyorsabban növekszik. Ebben a rezsimben alakul ki a buborék. A buborék kipukkanását egy ugrófolyamat segítségével valósították meg a modellben. Ez az ugrás egy rezsimváltás, ami után a részvényárfolyam viselkedése ismét olyan lesz, mint a buborék előtt volt. A következő SDE-vel írhatjuk le a részvényárfolyam dinamikáját:

$$\frac{dp_t}{p_t} = \mu_t dt + \sigma dW_t - \kappa dj,$$

ahol dj az ugró folyamat, amely 1 értéket vesz fel $h(t)dt$ valószínűséggel, különben pedig 0–*t*. A κ pedig az esés mértékét határozza meg, amelyet az előző válságok százalékos eséseinek átlagaként határoznak meg. Tehát a dj folyamat feltételes várható értéke $E_t[dj]=h(t)dt$, ahol

$$h(t) = B'(t_c - t)^{m-1} + C'(t_c - t)^{m-1}\cos(\omega \log(t_c - t) - \phi').$$

A $h(t)$-t úgy állapították meg Sornette-ék, hogy az leírja a kereskedők csordaviselkedését, amely a részvényárfolyam emelkedéséhez vezet. Ezt mutatja a fenti egyenletben az első tag. A második, koszinuszt tartalmazó tag rövid élettartalmú korrekciókat visz a modellbe. Ezt azzal magyarázhatjuk, hogy vannak fundamentális alapon kereskedők is a piacon, akik – miután látják, hogy az árfolyam irracionálisan magas – short pozíciót vesznek fel. Ezzel egyfajta fluktuációt visznek a buborék növekedésébe. Ennek köszönhetően jobb illeszkedést kaphatunk, bár ekkor nagyobb a túltanítás veszélye. Így a modell úgynevezett *log-periodic power law (LPPL)* viselkedést mutat. A $h(t)$ definícióban a t_c a válság bekövetkezésének

5 Johansen, A.–Sornette, D. [1999]: Critical crashes. 12(1):91–94.
Johansen, A.–Ledoit, O.–Sornette, D. [2000]: Crashes as critical points. 3:219–255.
Johansen, A.–Ledoit, O.–Sornette, D. [1999]: Predicting financial crashes using discrete scale invariance. *Journal of Risk*, 1(4):5–32.
Sornette, D. [2002]: Why stock markets crash – Critical events in complex financial systems. Princeton University Press
Wanfeng, Yan–Rebib, Réd–Woodard, Ryan–Sornette, Didier [2011]: Detection of crashes and rebounds in major equity markets. RC working paper No. 11-001, July 8.

időpontja. Ahhoz, hogy a $h(t)dt$ egy olyan valószínűség legyen, ami növekszik t-vel t_c-hez tartva, szükségünk van az $m<1$ feltételezésre. Ahhoz pedig, hogy az árfolyam mindig véges maradjon (beleértve t_c időpontot is), az m legyen pozitív.

A modellből még hiányzik a buborék kialakulásának lehetősége, amit a μ-nek kell tartalmaznia. A μ-t úgy definiálták, hogy összefüggjön a $h(t)$-vel. Az alapötlet az volt, hogy a ELMM szerint a folyamat lokális martingál, tehát a növekményeinek feltételes várható értéke 0:

$$E_t[dp] = \mu(t)p(t)dt + \sigma p(t)E_t[dW] + \kappa p(t)E_t[dj] = 0,$$

ebből következik, hogy

$$\mu(t) = \kappa h(t).$$

Most feltételezzük azt, hogy épp (a $[t, t+dt]$ intervallumban) nincs válság, azaz $dj=0$. Ekkor a feltételes várható érték:

$$E_t\left[\frac{dp_t}{p_t}\right] = \kappa h(t)dt,$$

és $h(t)$-t behelyettesítve és kiintegrálva kapjuk az úgynevezett *log-periodic power law (LPPL)* egyenletet:

$$lnE_t[p(t)] = A + B(t_c - t)^m + C(t_c - t)^m \cos(\omega ln(t_c - t) - \phi),$$

ahol

$$B = -\kappa B'/m \text{ és } C = -\kappa C'/\sqrt{m^2 + \omega^2}.$$

Jegyezzük meg, hogy nincs definiálva, mi történik a t_c időpont után. A továbbiakban az empirikus vizsgálatok során a paraméterek becslését ezzel a feltételes várható értékkel végzik.

3.2. A válság-előrejelző modell

Sornette-ék meghatároztak egy válság-előrejelző módszert, ami az *I. M. Gelfand* által kifejlesztett földrengés-előrejelző eljárásán alapszik. A válság-előrejelzési technika első lépése, hogy az idősort különböző hosszúságú intervallumokra osztják, és a modellillesztést minden egyes intervallumon végrehajtják. A válság közeledtével pedig a modell becsült paraméterei megváltoznak. A módszer további részében ebből a változásból nyernek ki információt a válság lehetséges közeljövőbeli bekövetkezéséről. Az eljárás meglehetősen összetett, az eredmény pedig egy 0 és 1 közötti szám (alarmindex) lesz, amely egy válságközeli bekövetkezésének a valószínűségét becsüli meg. Ezt az indexet felhasználva, egy kereskedési stratégiát is konstruáltak, amelynek eredményességeit számos cikkben vizsgálták. A módszerről részletesen olvashatunk a szakirodalomban.[6]

6 SORNETTE, D.–YAN, W.–WOODARD, R. [2010]: Diagnosis and prediction of market rebounds in financial markets. *Physica* A 391(4), 1361–1380.
SORNETTE, D.–ZHOU, W.-X. [2006]: Predictability of large future changes in major financial indices. *International Journal of Forecasting* 22:153–168.
WANFENG, YAN–REBIB, RÉD–WOODARD, RYAN–SORNETTE, DIDIER [2011]: Detection of crashes and rebounds in major equity markets. RC working paper No. 11-001, July 8.

4. A Bihary Zsolt-féle részvényárfolyam-modell vizsgálata a buborékképződés szempontjából

Ebben a fejezetben a dr. Bihary Zsolt által fejlesztett részvényárfolyam-modellt mutatjuk be a buborékképződés szempontjából. Bihary célja olyan stilizált tényeket modellezni, amelyekre a hagyományos geometriai Brown-mozgás nem képes; ilyen például a kereskedők stratégiáit befolyásoló félelem és kapzsiság.

4.1. A modell

A részvényárfolyamok dinamikáját, hasonlóan a már megszokott geometriai Brown-mozgáshoz, egy sztochasztikus differenciálegyenlettel írjuk le. A különbség viszont az, hogy itt a μ és σ paraméterek nem determinisztikusak, hanem egy R_t folyamattól függenek:

$$R_t = \int_{-\infty}^{t} \exp(k(u-t)) \frac{dS_u}{S_u}.$$

Így a részvényárfolyam-dinamika a következőképpen néz ki:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma(R_t)dW_t + \mu(R_t)dt.$$

R_t egy exponenciálisan súlyozott mozgóátlag-folyamat, amely a múltbeli hozamok súlyozott átlagát adja. Az exponenciális súlyozásnak köszönhetően a jelenhez közeli „információk" (hozamok) sokkal nagyobb súlyt kapnak, mint a múltbeliek. Például $u=t$ esetén a súly értéke 1. A múlt hatása viszont exponenciálisan csökken, amelynek sebességét a k paraméter határozza meg. Intuitíve gondolhatunk az R_t-re úgy, mint a múltbeli hozamok súlyozott átlagára. Viszont a múltat „szép lassan" elfelejtjük.

Ebben a modellben tehát a drift és a diffúzió együtthatója is függ a múltbeli hozamoktól. Az R_t folyamatot differenciálva kapjuk a következő sztochasztikus differenciálegyenletet (továbbiakban SDE):

$$dR_t = -kR_t dt + \frac{dS_t}{S_t}.$$

4.2. A konkrét specifikáció

A modell legfontosabb kérdése, hogy mi legyen a konkrét specifikáció. Cél, hogy olyat találjunk, amely leírja azokat a viselkedési tényezőket, amelyekkel találkozhatunk a piacokon. Másrészt az is elvárás, hogy ez kellőképpen egyszerű legyen ahhoz, hogy matematikailag kezelni tudjuk. A dolgozat szempontjából a trend együtthatója a releváns, úgyhogy a továbbiakban a szigmát konstansnak tekintjük. A drift együtthatójának konstrukciója a következő:

.

$$\mu_S(R_t) = \begin{cases} \alpha_1 k R_t + \mu_0, & \text{ha } R_t \geq 0; \\ \alpha_2 k R_t + \mu_0, & \text{ha } R_t < 0. \end{cases}$$

Látható, hogy az egyébként R_t-től lineárisan függő trendegyütthatóban egy törés van az R_t=0 pontban, a trend viselkedését pedig az α_i paraméterek határozzák meg. Amennyiben α_1 és α_2 is pozitív, az árfolyam mindkét irányba elszállhat. Ha a hozamok mélyen zuhannak, akkor a drift egyre negatívabb lesz. Ha pedig nagy pozitív hozamok dominálnak, akkor a drift nőni fog. Például, ha egy részvény elkezd emelkedni, akkor az emberek gyakran pozitívabban gondolnak rá. Azt hiszik, hogy ez egy hosszú távú trend is lehet, úgyhogy venni szeretnének, ami fokozza az emelkedést, és egyfajta „rally” indul a részvényárfolyamban, amelyről senki sem szeretne lemaradni. Ez egy önmagát erősítő hatás, és ebből lehet egy buborék. Gyakran akkor is megveszik a papírt, ha tudják jól, hogy irreálisan magas az ára, abban bízva, hogy a jövőben még magasabbra emelkedhet. Bihary ezt a viselkedést kapzsiságnak nevezi.

A negatív irányú extrém viselkedést magyarázhatjuk a félelemmel. Az emberek félnek, hogy mindenüket elvesztik, és inkább kiszállnak a pozícióból, ami szintén önmagát erősítő folyamat. Véleményem szerint viszont a legtöbb esetben az jellemző, hogy bizakodnak és hisznek. Szeretnék visszanyerni az elvesztett pénzüket. Ebből kifolyólag α_2-nek lényegesen kisebbnek kellene lennie, mint α_1-nek.

4.3. Buborék a Bihary-modellben

Ebben az alfejezetben megpróbáljuk a Bihary-modellt beágyazni a szakirodalomba. Vizsgáljuk, hogyan kapcsolódik a legfontosabb elméletekhez, illetve miben tér el, melyek az előnyei más megközelítésekkel szemben.

Mivel itt is a drift együttható okozza a buborék kialakulását, ez az elképzelés az előző fejezetben említett JLS-modellhez áll közelebb. A továbbiakban az elemzést csupán a μ_R együtthatóra korlátozzuk, a σ-t konstansként kezeljük. Az előző fejezetben definiáltakhoz hasonlóan az S_t részvényárfolyamat megoldása a következő sztochasztikus differenciálegyenletnek (SDE):

$$dS_t = \mu(R_t) S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Az előző fejezet alapján tudjuk, hogy Bihary-féle specifikáció esetén a részvényárfolyamok gyorsabban emelkednek, ha már az elmúlt időszakban is magas pozitív hozamok domináltak. Ezt a viselkedést magyarázza Bihary a kapzsisággal, azaz ha egy pénzügyi termék ára trendszerűen emelkedik, akkor ez csábító hatással van azokra a befektetőkre, akik nem szeretnének lemaradni a „rallyról”. A további vásárlások egy keresleti nyomást gerjesztenek a piacon, aminek hatására az ár tovább emelkedik. Ilyen piacon a termék kereskedelmi ára könnyedén elhagyja a valós értékét („fair árát”), azaz kialakul egy buborék az árfolyamban.

A következő alfejezetben egy szimulált példán keresztül szemléltetjük, hogyan képes a Bihary-modell a fent említett pszichológiai tényezőket leírva, buborékot kialakítani.

4.4. Az árfolyamatok

Vegyünk alapul egy világkereskedelemben érintett nagyvállalatot, amelynek gazdasági („reális”) értéke nagyban függ a világgazdaság állapotától. A világgazdaság komplexitása miatt nehéz a jövőt előre jelezni, tehát nem túlzás a vállalat értékalakulását a következő sztochasztikus folyamattal (*GBM*) leírni:

$$dV_t = \mu_0 V_t dt + \sigma V_t dW_t,$$

ahol μ_0 és σ is konstansok.

A szakirodalomhoz kapcsolódva tételezzük fel, hogy a vállalat élethossza csupán egy τ megállási ideig tart. Ezt többféleképpen lehet indokolni: lehet csőd, fúzió, felvásárlás. De akár azt is elképzelhetjük, hogy a vállalatot egy konkrét feladat végrehajtása céljából alapították, a feladat végeztével pedig megszűnik, az értékét a tulajdonosok közt osztják szét.

A vállalat részvényeivel a tőzsdén kereskednek. Tegyük fel, hogy a befektetők nem tudják pontosan meghatározni a vállalat reális értékét, továbbá, hogy olyan pszichológiai tényezők is befolyásolhatják őket az üzleti döntéseik meghozatalánál, mint a Bihary-féle modellben definiált kapzsiság (l. 4.1. fejezet). Tehát pozitív hozamok esetén azt feltételezik, hogy a piacon beindult egy trend, amely hosszabb távon fennállhat. Ebben a szituációban akkor is fizethetnek a valós árnál magasabbat a részvényekért, ha tisztában vannak a fair árral, pusztán azért, mert arra számítanak, hogy később még drágábban el tudják adni.[7] Ez a gondolatmenet megfelel annak az esetnek, amikor a vállalat tőzsdei részvényeinek értékalakulását a már említett SDE írja le:

$$dS_t = \mu(R_t) S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

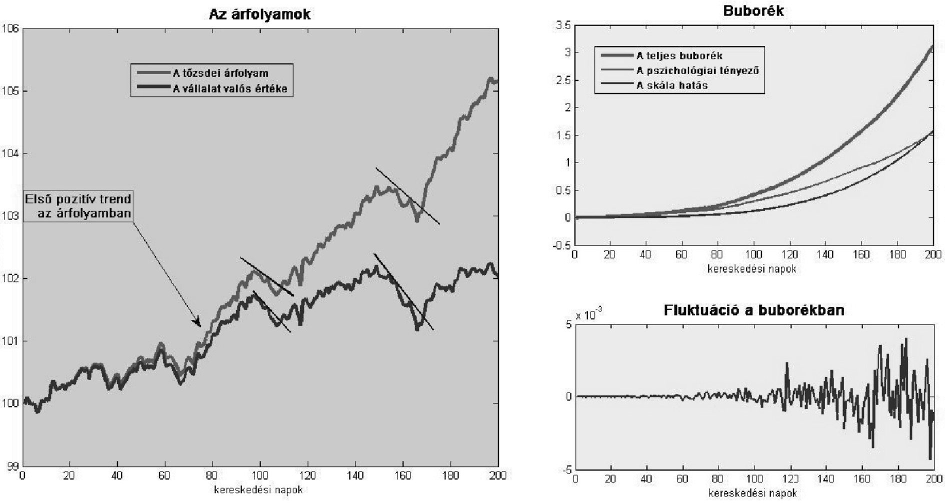
A szakirodalomhoz hasonlóan a továbbiakban úgy definiáljuk az eszköz árában megjelenő buborékot, hogy az a piaci ár és a vállalat valós ára közötti különbség. Fontos látni, hogy ebben a modellben ugyanaz a σ volatilitás-együttható és W_t Brown-mozgás szerepel a két SDE-ben. Tehát a $[0,t]$ időintervallumon létrejött különbséget egyszerűen leírhatjuk a következő integrállal:

$$\beta_t = S_t - V_t = \mu_0 \int_0^t (S_u - V_u) du + \sigma \int_0^t (S_u - V_u) dW_u + \int_0^t \alpha_u k R_u du.$$

7 Mint ahogy azt láthattuk megannyi buborék esetén a történelemben.

2. ábra

Szimuláció a buborékról

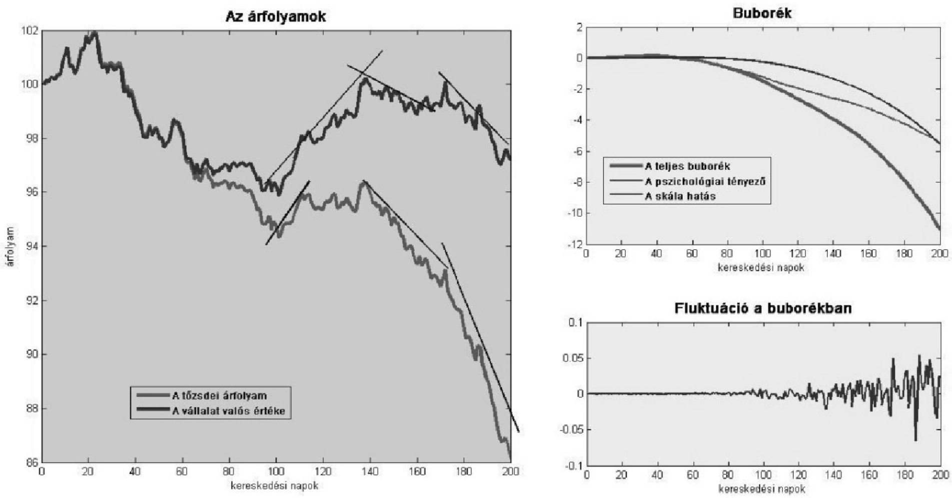


Az ábrán látható, hogyan alakulnak az árfolyamok a tőzsdén, ellentétben a vállalat valós értékével. Eleinte a vállalat értékalakulása nem mutat semmi érdekességet, de amikor egy viszonylag hosszabb távú, éles pozitív trend mutatkozik meg a vállalat értékében, a tőzsdei árfolyam szintén emelkedik, ám a trend után a vállalat értékalakulása ismét egyszerű „bolyongásra" emlékeztet. Ezzel ellentétben a tőzsdei árfolyamok tovább emelkednek az emberi tényező miatt. A vállalat értéke kétszer is csökkenni kezd, ezt magyarázhatjuk negatív gazdasági, politikai eseményekkel, hírekkel. Természetesen ezekről az eseményekről a tőzsdei kereskedők is tudomást szereznek[8], tehát a tőzsdei árfolyamokra is hat. Az optimizmusnak köszönhetően viszont csak kisebb mértékben (kevésbé meredek a zuhanás), mint az indokolt lenne, és utána folytatódik a gyors növekedés. A jobb felső ábrán a korábban definiált buborék (β_t) és a két dt mértékű tagja, az alatta lévő ábrán pedig a buborék dW_t mértékű tagja látható.

8 Feltételezhetjük, hogy azonnal.

3. ábra

Negatív buborék



A fenti ábrán egy negatív buborékra láthatunk példát. Előfordulhat, hogy egy vállalat gazdasági értéke nem indokol árfolyamcsökkenést, mégis zuhan az ára a tőzsdén. Ennek oka lehet például hamis híresztelés a vállalat értékéről, ami aztán pánikot szül a befektetők körében. A szakirodalom számos cikke is foglalkozik[9] olyan negatív buborékok esetével, amikor a buborékot nem egy krach, hanem egy úgynevezett „visszapattanás" szünteti meg.

Az ábrán láthatjuk, hogy a kezdeti hosszú negatív trendet a befektetők túlreagálják, és akkor is tovább csökken az árfolyam, amikor már az nem lenne indokolt, majd a vállalat értékében egy pozitív trend alakult ki, amelyet kedvező változás okozhatott a gazdasági környezetben. Természetesen erről a befektetők is kapnak híreket, aminek hatására egy rövid időre emelkednek a részvényárfolyamok. A befektetők viszont még nem felejtették el a hosszú távú zuhanást. A pozitív hírek nem voltak elég erősek, hogy megváltoztassák az általános piaci hangulatot, az árak tovább esnek. Ez a folyamat pedig önmagát erősíti.

4.5. Ugrófolyamat építése a Bihary-modellbe

A Bihary-modell gyenge pontja, hogy noha a részvényárfolyam-dinamikában megvan a lehetőség a részvényárfolyam gyors emelkedésére, a buborék utáni összeomlásra már nincs. Ehelyett ez egy önmagát erősítő folyamat, amely a végtelenségig is képes az árfolyamot emelni.

9 Johansen, A.–Ledoit, O.–Sornette, D. [2000]: Crashes as critical points. 3:219–255.
Sornette, D.–Yan, W.–Woodard, R. [2010]: Diagnosis and prediction of market rebounds in financial markets. *Physica* A 391(4), 1361–1380.

A 3.1. fejezetben említett JLS-modellhez hasonlóan a Bihary-modellben is definiálhatunk egy ugrófolyamatot, amely a válságot szemlélteti:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(R_t)dt + \sigma dW_t - \kappa U_t,$$

ahol U_t egy ugrófolyamat, ami 0 és 1 értékeket vehet fel.

Ez a fajta megközelítésmód két fontos kérdést vet fel. Először is: mi legyen a κ, azaz mekkorát zuhanjanak az árfolyamok egy válság során? Másodszor pedig, hogy milyen valószínűséggel vegyen fel 1 értéket az U_t. Az irodalom a κ meghatározásánál egyszerűen a múltbéli válságok méretének az átlagát vette, tehát κ egy konstans.

A 3. fejezet gondolatmenetét követve, meghatározzuk az ugrás valószínűségét leíró $h(t)$ függvényt. Azzal a feltételezéssel élve, hogy a részvényárfolyam-folyamat egy lokális martingál, tehát a dinamikájának a kockázatsemleges mérték szerinti feltételes várható értéke 0:

$$E\left(\frac{dS_t}{S_t}|\mathcal{F}_t\right) = \mu(R_t)dt + \sigma E(dW_t|\mathcal{F}_t) - \kappa E(U_t|\mathcal{F}_t) = \mu(R_t)dt - \kappa h(t)dt = 0.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\mu(R_t) = \mu_0 + \alpha_i k R_t = \kappa h(R_t).$$

Az egyszerűbb elemzés miatt egyelőre tekintsünk el μ_0-tól. Láthatjuk, hogy a válság bekövetkezésének valószínűségét meghatározó $h(R_t)$ az R_t-nek egy skalárszorosa. A szakirodalommal ellentétben már nem időfüggő, hanem a múltbeli hozamoktól függ. Ez jelentős különbség a két modell között.

Ahhoz, hogy vizsgálni tudjuk a buborék kialakulásának szakaszát, tegyük fel, hogy két egymást követő krach a t és T időpontban következik be. A köztük lévő időintervallumban eleinte nyugodt piaci körülmények zajlanak, majd elindul a buborék kialakulása. A t utáni nyugodt piac feltételezésünkhöz az R_t értéket nullára kell állítanunk. Ekkor az S_t-ben még nem indul el a buborékképződés, ehhez először egy pozitív trendre van szükség, amit fundamentális tényezők indokolnak.

Ezen a szakaszon a folyamat várható értéke a buborék kialakulásának trendjét jelenti. A korábbiak alapján

$$E\left(\frac{dS_t}{S_t}|\mathcal{F}_t\right) = \mu(R_t)dt + \sigma E(dW_t) = \mu(R_t)dt = \kappa h(R_t)dt.$$

Eddig a pontig követtük a szakirodalom elemzési menetét, a különbség csupán az, hogy más megközelítéssel magyarázzuk a motivációt a buborék kialakulására. A mi esetünkben viszont ennek a differenciálegyenletnek a kiszámítása nem könnyű feladat. Míg az irodalomban az $E_t\left[\frac{dp_t}{p_t}\right] = \kappa h(t)dt$ DE pusztán időfüggő volt, itt a múltbeli hozamok mozgóátlagától függ, ami miatt nem tudjuk egyszerűen megoldani.

Ezt a problémát megkerülve, a részvényárfolyamok helyett azok logaritmusának különbségével foglalkozunk. Legyen $X_t = ln(S_t)$, ekkor

$$E\left(X_T - X_t|\mathcal{F}_t\right) = E\left(ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)|\mathcal{F}_t\right).$$

Amíg a szakirodalom a

$$lnE_t[p(t)] = A + B(t_c - t)^m + C(t_c - t)^m \cos(\omega ln(t_c - t) - \phi),$$

függvényt illesztette az árfolyamok logaritmusára, addig mi az X_t-k különbségének várható értéket illesztjük az idősor loghozamaira.[10] A várható értékre (amit egy függvényként definiálunk) egy parciális differenciálegyenletet írtunk fel, amelyet aztán megoldottunk. Az eredmény pedig a következő:

$$f_1(\tau) = E\left(X_T - X_t | R_t = r\right) =$$

$$-\frac{\mu_0\alpha}{(\alpha-1)^2k} + (\frac{\mu_0}{1-\alpha} - \frac{{\sigma_0}^2}{2})\tau + \frac{\mu_0\alpha}{(\alpha-1)^2k}e^{(\alpha-1)k\tau} + \tfrac{\alpha}{1-\alpha}\left(1 - e^{(\alpha-1)k\tau}\right) \cdot r$$

Amit kaptunk, az egy konstans, egy konstanssal szorzott exponenciális tag és lineáris tag összege. Jegyezzük meg, hogy a konstans biztosítja azt, hogy 0-ból induljon a folyamat, tehát:

$$f_1(\tau) = -P1 + P2 \cdot \tau + P1 \cdot e^{P3\tau},$$

ahol

$$P1 = \tfrac{\alpha}{\alpha-1}\left(\tfrac{\mu_0}{(\alpha-1)k} + r\right),\ P2 = (\tfrac{\mu_0}{1-\alpha} - \tfrac{{\sigma_0}^2}{2}) \text{ és}$$

$$P3 = (\alpha - 1)k.$$

Fontos látni, hogy itt az *r* szintén egy konstans, amit a múltbeli hozamokból számolhatunk ki, mivel a feltétel a várható értékben azt jelenti, hogy ismerjük a múltat.

Empirikus tapasztalataink alapján ez a függvény jól illeszkedik különböző idősorok buborékkialakulási szakaszaira. A továbbiak során viszont egy kvadratikus függvényt használunk a modellillesztéshez. Ekkor a paraméterek számát kettőre csökkentjük, amelyek egymástól jól elkülönülve, a lineárist és a görbületet írják le. A két függvénytípus nem ugyanaz, de kis görbület esetén az eltérésük nem jelentős. (Számos illesztés során láttuk, hogy a kvadratikus függvény is hasonlóan jól illeszkedett.) A függvénycserére azért van szükség, mert a fenti képletben a paraméterek közötti szoros összefüggés gondot okoz az interpretációban. Viszont az új paraméterek egyike a görbületért, a másik pedig a linearitásért felelős.

A Bihary-modell is alkalmas a 3. fejezetben említett válság-előrejelző módszer alkalmazására. Empirikus vizsgálatok azt mutatják, hogy a válsághoz közeledve, itt is változik a becsült paraméterek eloszlása. Ez nem túl meglepő, hiszen a modell úgy van konstruálva, hogy a loghozamok exponenciálisnál gyorsabb sebességgel növekedjenek. Minél magasabb szintet érnek el, annál nagyobb valószínűséggel következik be a válság, tehát minél meredekebben növekszik az árfolyam, annál közelebb a krach. Ebből kifolyólag az előrejelző indikátorunk lehetne egy egyszerű meredekség is. Talán Sornette-ék módszere megbízhatóbb, mert jóval több becslés eredményét összesíti egyetlen számban.

A szakirodalomban bemutatott JLS-modellhez kapcsolódó válság-előrejelző modell meglehetősen szofisztikált. A modell több szabad paraméterrel rendelkezik, amelyeknek a különböző beállításai befolyásolják az eredményt. Ennek ellenére Sornette-ék messzemenő következtetéseket vonnak le a módszer alkalmazásának eredményeiből. Az előállított alarmindex a válság közeljövőbeli bekövetkezésének valószínűségét becsli, ami egy

10 A feltételes várható értéket a Kochmeister-pályázat *E függelékében* számoltuk ki. A számítás során a Backward–Kolmogorov-módszer egy módosítását használtuk Bihary ötlete alapján.

kereskedési stratégia alapját szolgálja. Mivel múltbeli információkat felhasználva hoznak állítást a jövőre vonatkozóan, ez a fajta elképzelés az erősen vitatott technikai elemzésre emlékeztethet minket. Amennyiben létezik is egy modellel leírható kapcsolat a múlt és a jövő árfolyam alakulása között, nem lehetünk biztosak benne, hogy ez a fajta kapcsolat nem változhat.

Habár az irodalom több cikkében pozitív eredménnyel alkalmazták az eljárást különböző piacok különböző termékeire, nem állíthatjuk, hogy az említett stratégiával kockázatmentes hozamot érhetünk el. Számos kutató használta az eljárást annak ellenére, hogy a tudósok körében sincs egyetértés sem a buborék, sem pedig az azt követő válság definíciójában. Egyik cikkben[11] például egy százéves idősoron csupán 3 válságot definiáltak. Ekkor viszont a stratégia is csak átlagosan 30 évente alkalmazható, ami valószínűleg nem releváns egy hedge fund számára. (Jóllehet, a portfólió kockázatos eszközeinek leépítése több lépésben történik, de nem 30 év alatt.) Egy másik cikkben[12] egy sokkal gyakoribb kereskedési stratégiát javasoltak, ami a negatív buborékok esetén is trade-jelzést biztosít a kereskedőknek. Ebben az esetben pedig gyakori buborékkialakulást feltételezünk. A matematikai elemzésekből kiderül, hogy buborék bármikor véletlenszerűen kialakulhat az árfolyamban, ennek ellenére a folyamatos kereskedést biztosító stratégia inkább a már említett technikai elemzés témakörébe illene, mint a buborék frissen kialakuló elméletébe.

Továbbá, az irodalomban nem foglalkoznak a kereskedési korlátokkal sem. Amennyiben egy nagyméretű hedge fund akarja használni a stratégiát, komoly gondot okozhat, hogy a buborék kipukkanása környékén a piac keresleti oldala kiszárad. Ez a likviditási probléma a piacon kialakuló pánik következménye, amit az első nagyobb eladási hullám von maga után. Tehát nagy tőkével nem lehet kidurranás előtt kiszállni, mert maga a kiszállás fogja beindítani a buborék kipukkanását. Az egyetlen megoldás a portfólió folyamatos leépítése, így alacsonyabb profitot érhetünk el, de semmiképp sem ragadunk benn a buborékban. Hatalmas tőke esetén ezzel lassítjuk a buborék kialakulását is, ha pedig már nagy buborékban vagyunk, akkor ebben az esetben is elindíthatjuk a piaci zuhanást. Természetesen kis tőkével rendelkező befektetőnek egy likvid piacon nem okoz problémát a krach előtt kiszállni, amennyiben sejti a megfelelő kiszállási időpontot.

A technikai elemzést elutasító szakemberek gyakran úgy érvelnek, hogy ha egy stratégia működne, akkor az széles körben elterjedt volna. Ekkor viszont a stratégiát nagy számban alkalmazók felhagytak volna azzal a piaci viselkedéssel, amellyel eredetileg a profitot akarták kinyerni. Ez a mi válság-előrejelző modellünkre is igaz. A buborék közbeni folyamatos eladás meggátolná a buborék további növekedését, sőt megszüntetné a létezését még „kezdeti stádiumban". Tehát ha a stratégiával nem is lehet pénzt keresni, az elterjedése hasznos lenne a társadalom számára (amennyiben valóban helyesen jelzi a buborékokat).

A leírtakat átgondolva úgy döntöttünk, hogy nem célunk egy konkrét válság-előrejelző modell és kereskedési stratégia megalkotása. Bár – ahogy már említettük – az irodalomhoz hasonlóan a Bihary-modell is alkalmas a stratégia megalkotására. A spekulációs motivációk helyett egyfajta figyelmeztetést adó eljárást fogalmazunk meg. Az alapvető feltételezésünk,

11 Sornette, D.–Zhou, W.-X. [2006]: Predictability of large future changes in major financial indices. *International Journal of Forecasting* 22:153–168.

12 Wanfeng, Yan–Rebib, Réd–Woodard, Ryan–Sornette, Didier [2011]: Detection of crashes and rebounds in major equity markets. RC working paper No. 11-001, July 8.

hogy nyugodt piaci környezetben a múltbeli adatok nem hordoznak információt a jövőre nézve. Ennek ellenére a piacon tapasztalható olyan speciális, extrém viselkedés, amikor az emberek pszichológiai szempontok miatt hasonlóan viselkednek, és ezáltal kialakul az ún. csordaszellem. Ez egybevág azzal a feltételezéssel, hogy a válsághoz közeledve a becsült paraméterek eloszlása szignifikánsan különbözik a nyugodt piacon tapasztaltakétól. Tehát ezek a paraméterek valóban hordozhatnak információt a válság kialakulásáról.

Az irodalommal ellentétben mi nem számszerűsítjük ezt az információt vitatható és bonyolult eljárásokkal, hogy aztán spekulatív szándékainknak eleget tegyünk. Pusztán a paramétereknek egy olyan tartományát adjuk meg, amely figyelmeztető jelzés lehet a szabályozás vagy a monetáris politika számára. Talán a megfelelő szervek képesek a szabályozás eszközeivel kezelni, enyhíteni a krach hatását a gazdaságra. Vételi vagy eladási jelzések helyett pedig legfeljebb annyit állítunk, hogy a kockázatkerülő emberek számára nem javasoljuk az adott termék megvételét. A cél, hogy a paramétereknek egy olyan tartományát adjuk meg, amelyben az esetek túlnyomó többségében nagyobb zuhanás alakulhat ki. Ez a fajta előrejelzés nem olyan precíz és megbízható, hogy a pénzünket kockáztassuk, azért lehet figyelmeztetés. Ha tévedünk, nem veszítettünk semmit; ha azonban igazunk volt, és a szabályozás aszerint cselekedett, talán enyhítettük a válság hatását.

4.6. Az ingatlanbuborék és a 2007-es válság

A 2000-es évek elején kialakult ingatlanár-buborék 2007-es kipukkanása globális gazdasági világválsághoz vezetett, tehát fontos megérteni, milyen tényezők álltak az irreális árfolyam-növekedés hátterében. 2000 és 2002 között az *Alan Greenspan* vezette Fed erős kamatvágása hozzájárult többek között a jelzálogalapú hitelek kamatainak csökkenéséhez és gyors elterjedésükhöz. Ezzel tehát nőtt a lakásvásárlások száma. Ráadásul a bankok – látva a folyamatosan emelkedő ingatlanárakat – úgy gondolták, megengedhetik maguknak, hogy akár nulla önrésszel is hitelt nyújtsanak, illetve egyre „kevésbé jó” ügyfeleket is hitelhez juttattak (lásd NINJA hitel). Ez pedig tovább fokozta a keresleti nyomást az ingatlanpiacon.

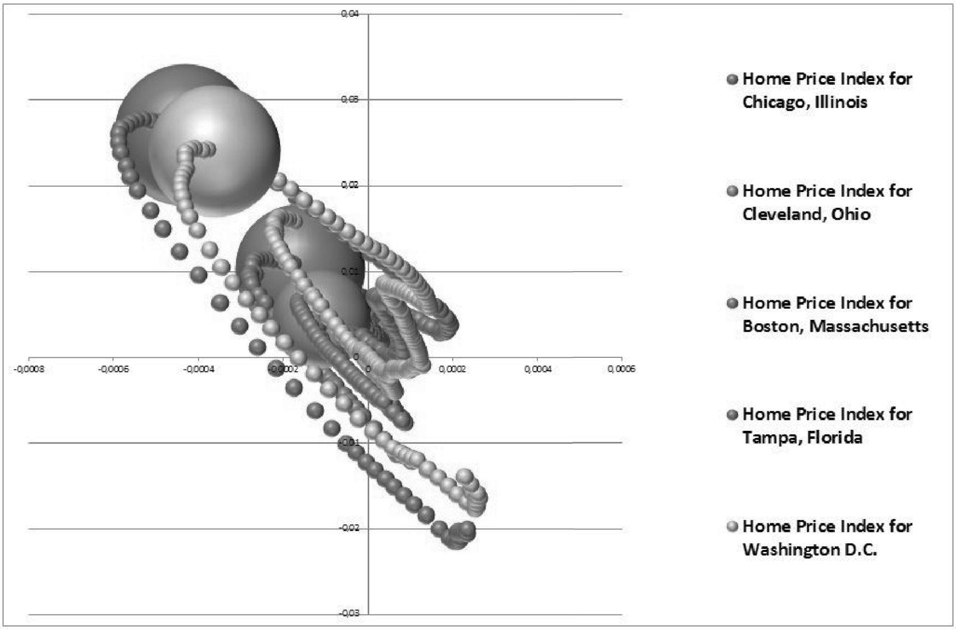
A pozitív hangulat hatására az emberek gyakran spekulatív szándékkal vásároltak ingatlant. Az olcsó hitelből egy olyan termékhez juthattak hozzá, amely nagyon magas (a hitelkamatlábnál is magasabb) hozamokat biztosított. Az árfolyam 2005-ben érte el a csúcsát, miután rövid stagnálást követően gyors zuhanásba kezdett. A piacon kialakult az eladási pánik. Ezt a negatív folyamatot erősítette többek között, hogy az embereknek gyakran többet kellett visszafizetniük, mint a fedezet, tehát jobban megérte felmondani a hitelt.

A 2007-es ingatlanár-zuhanás a CDO-k (Collateralized Debt Obligation) és a tőkeáttétel következtében az egész világra kiterjedő gazdasági válságot eredményezett. Bár sokan felhívták a figyelmet a buborék létezésére és az esetleges válság veszélyeire, de a szabályozók nem tették meg a megfelelő lépéseket, amelyek időben kezelték volna a problémát. Amennyiben lettek volna megbízható, válságot jelző modellek, amelyek felhívják a figyelmet a veszélyre, akkor talán az emberek sem lettek volna ennyire mohók; másrészt pedig a szabályozás is jobban beavatkozott volna. Ennek tükrében a következőkben megvizsgáljuk, a Bihary-modell hogyan viselkedik az ingatlanárak esetén az említett időszak vizsgálatakor.

A vizsgálathoz szükséges adatok a Standard & Poor's *Case-Shiller Home Price Indices* adatsora biztosította, ami az Egyesült Államok egyik inflációval korrigált ingatlanár-indikátora. Korábban már említettük, hogy a Bihary-modellt egy kvadratikus függvénnyel jól közelíthetjük, ahol a P_1 paraméter a négyzetes taghoz tartozik, a P_2 pedig a lineáris tag együtthatója.

4. ábra

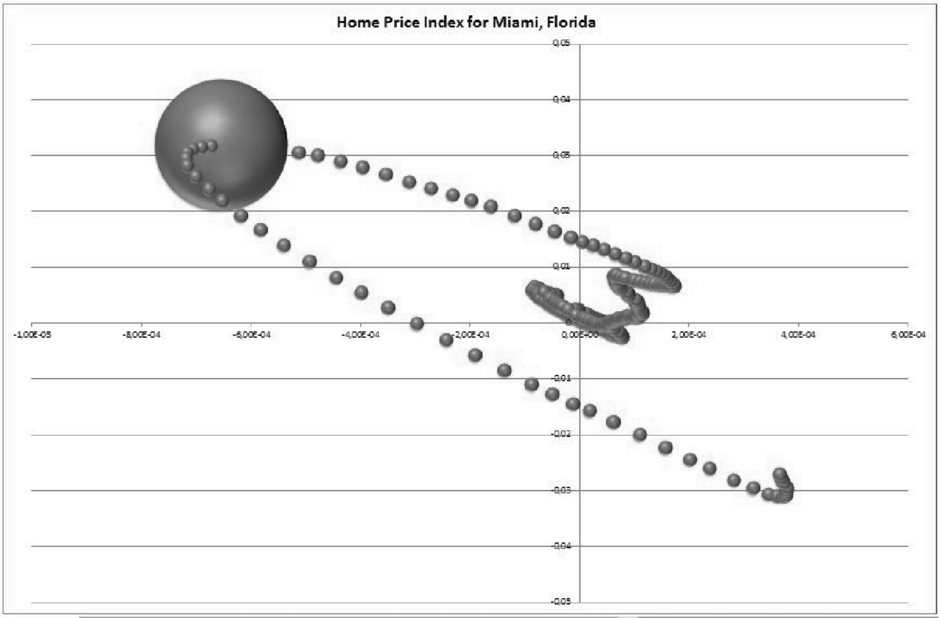
A modellillesztés különböző városok árindexe esetén



A fenti ábrán a különböző városokhoz tartozó árfolyamindex modellillesztésének eredményeit szellemesen egy ún. *bubble plot* segítségével jelenítjük meg. Az ábrákon az x tengely a P_1 paramétert, az y tengely pedig a P_2 paramétert jelöli. A buborékok méretei pedig a zuhanás méretét jelölik. Mivel a felfutó időszakban ez az érték nem létezik, a krach pedig meglehetősen gyorsan lezajlik, a kisebb golyókhoz nem rendelünk változó súlyokat. Csupán egy ponthoz, a buborék csúcspontjához rendeltük hozzá az árfolyamesés százalékos értékét. A többi pontot súly nélkül ábrázoltuk, jelezvén, hogy ott is van megfigyelés, amikor épp nincs válság. Az ábrából arra is következtethetünk, hogy a buborék növekedése lassabb folyamat volt, mint a kidurranás, ugyanis a buborékok közötti távolság nőtt.

5. ábra

A modellillesztés Miami ingatlanár-indexe esetén



Ezen az ábrán Miami ingatlanárain keresztül megfigyelhetjük, hogyan is alakult ki a buborék, majd pedig a válság. Kezdetben az origó környékén szóródott, ekkor még viszonylag nyugodt volt a piac, majd elindult a buborékképződés, és északnyugati irányba haladtak a paraméterek. A válság bekövetkezésénél pedig elérte a bal szélső csúcspontját a P_2 értékében. A krach után csökken a paraméterek értéke, és elmegy egészen a délkeleti síknegyedbe. Ez nagy negatív meredekséget és immár konvex függvényt mutat. Több város esetén is hasonló a viselkedés. A különbség, hogy minél nagyobb volt a buborék és az azt követő bezuhanás (százalékos esés), annál inkább ment el északnyugati irányba.

5. Összefoglalás

A dolgozat fő kutatási területe az eszközárbuborékok matematikai modellezése, ami a sztochasztikus folyamatok elméleti keretein belül egyszerre jelent elméleti kihívást és gyakorlati haszonnal járó feladatot is. Elsődleges célunk volt olyan matematikai modellt találni, amely jól leírja a tőzsdén tapasztalt buborékok kialakulását és az azt követő piaci összeomlást. Ezt követően pedig azt vizsgáltuk, hogy egy ilyen modellt hogyan lehet használni buborék kimutatására vagy egy válság előrejelzésére. Három elképzelést mutattunk be modellezés céljából: az első két modell a szakirodalom két nagy táborának kutatásain alapul, míg a harmadik a Bihary Zsolt által felvázolt részvénydinamika továbbfejlesztése.

A 2. fejezetben Protter az eszközárbuborékot a piaci árfolyam és a fundamentális ár különbségeként definiálta. A fundamentális ár meghatározására pedig a jövőbeli kifizetések (osztalékok) kockázatsemleges várható értékének a jelenértékét használta. Viszont a jövőbeli pénzáramlatot egy sztochasztikus folyamattal adta meg, tehát ebben a modellben is fennáll ugyanaz a probléma, mint a valóságban: nem tudjuk pontosan meghatározni a fundamentális árat. Az így definiált alapmodell viszont elegendő volt ahhoz, hogy olyan következtetéseket vonjon le, amelyek segítségével jobban megérthetjük a buborék viselkedését. Ezzel szemben a JLS-modellben egyáltalán nem is törekedtek a buborék konkrét definíciójára, hanem egy olyan részvényárfolyamatot adtak, amely már a buborékos árat modellezi. A Bihary-modellben szintén ezt az elképzelést követtük. Tehát nem adtunk választ olyan kérdésekre, hogy mi is a buborék, vagy mekkora a mértéke. Ezeket megkerülve, olyan kérdéseket akartunk megválaszolni, hogy jelen pillanatban buborékban vagyunk-e, és mikorra várható a krach.

Protter a modelljét a lokális martingálelméletre alapozza, és a drift együtthatóját konstansnak választva, a volatilitás együtthatóját tartja felelősnek a kialakult buborékért. Sornette-ék ennek az ellenkezőjét állítják, szerintük a drift az, ami miatt a részvényárfolyam elszállhat. Ebből az elképzelésből viszont még hiányzik, hogy egy buboréknak ki is kell durrannia, ami nagymértékű piaci esést eredményez. Ezt úgy oldották meg, hogy egy ugrófolyamatot építettek a modellbe, amelynek az intenzitása összefügg a trend együtthatójával.

A Bihary Zsolt-féle részvényárfolyam-dinamikában szintén olyan drift-specifikáció szerepel, amely irreálisan magas árfolyamokat eredményezhet, tehát a dolgozatban a szakirodalomhoz hasonlóan kiegészítettük a Bihary-modellt egy ugrófolyamattal. A legfontosabb eltérés Sornette és társai modelljéhez képest, hogy míg ők először az ugrás bekövetkezésének valószínűségét definiálták, és abból számolták ki a driftet, addig mi logikailag az ellentétes irányt választottuk. A Bihary-modellben definiálva van a drift, amelyből lokális martingál folyamatot feltételezve, kiszámolhatjuk az ugrás intenzitását. A különbség nem csupán az, hogy logikailag ésszerűbb utat választottunk, hanem egy teljesen más felépítésű modellt kaptunk.

Sornette-ék a historikus adatok alapján megfigyelték a buborék kidurranásának időpontját (t_c), és ahhoz időben közeledve, az exponenciálisnál gyorsabb ütemben nőttek az árfolyamok, tehát egy időfüggő dinamikát kaptak. Ennek a megközelítésmódnak az az előnye, hogy ha a részvényárfolyam várható értékét szeretnénk megkapni, könnyedén megoldhatjuk a pusztán időfüggő differenciálegyenletünket. A probléma viszont az, hogy azon túl, hogy a buborékban gyors és magas árfolyam-növekedést feltételeztek, nem épül be a modellbe semmiféle közgazdasági háttérelmélet vagy pszichológia tényező. Másrészről, amennyiben a jövőt szeretnék előre jelezni, már nem olyan egyértelmű a t_c meghatározása.

Ezzel ellentétben a Bihary-modell úgy van specifikálva, hogy a drift növekedéséért a múltbeli hozamok felelősek, amit egyetlen számba, az R_t exponenciális mozgóátlag-folyamatba sűrítünk. Ezt azzal magyaráztuk, hogy az emberek, látván a magas hozamokat, optimistábban gondolkodnak a termék megvételéről. Amennyiben a hozamok már kezdenek kiemelkedően vonzóak lenni, sokan nem is a termék miatt akarnak beszállni, hanem egyszerűen nem akarnak lemaradni a rallyról. Ez pedig egy önmagát erősítő folyamat, aminek egy krach vet véget. Komoly probléma viszont, hogy nem olyan egyszerű dolog a részvényárfolyam várható értékének a meghatározása, mivel a dinamika nem csupán idő-, hanem R_t-függő is. Ennek a problémának a megoldása céljából áttértünk az árfolyamokról a loghozamokra, ahol a Backward–Kolmogorov-egyenletek egy módosításával[13] ki tudtuk számolni a várható értéket. Tehát a technikai nehézségeket megoldva, egy közgazdaságilag megalapozottabb modellt sikerült adnunk, mint Sornette-éknek.

Protter szintén nem közgazdasági alapon fejlesztette modelljét, de matematikai szempontból precízen kidolgozta azt. Legfontosabb állítása, hogy egy részvény árfolyamában akkor lehet buborék, ha az egy szigorúan lokális martingál. Ennek vizsgálatára módszertant is alkotott, amelynek alapjait a jelen cikkben is bemutattuk. Ezt az eljárást alkalmazta számos termék esetén, és sok esetben sikeresen mutatta ki a buborék létezését. A tanulmány az inverz Bessel-folyamattal konkrét példát is biztosított szigorúan lokális martingálfolyamatra. Ezzel a folyamattal az a probléma, hogy szimulációink során gyakran kiderült, hogy a buborék vagy relatíve gyorsan nőtt meg, vagy pedig relatíve lassan durrant ki. Gyakran ugyanannyi idő volt a felépülése, mint a kipukkanása, ami az empirikus tapasztalatok alapján nem valósághű állítás. Ezzel szemben a másik két modellben az ugrófolyamat azonnali esést eredményez. Itt a probléma inkább az, hogy az esés mértékét (κ) nem lehet jól előrejelezni. Amennyiben pusztán a buborékszakasz érdekel bennünket, és még a kidurranása előtt meg akarunk szabadulni a portfóliónktól, akkor ez a probléma nem releváns.

A 2. fejezetben bemutatott modellben a buborék véletlenszerűen, bármikor kialakulhat, míg a 3. fejezet modelljében folyamatosan gerjed. A növekedés sebessége viszont átlagosan nő, de egy koszinuszos tag folyamatos rövid távú korrekciókat visz a buborékképződésbe. A Bihary-modell buborékfelépülése szintén gyorsabb az exponenciálisnál, viszont nem kap korrigálást egy külön taggal, ami bonyolítaná az illesztést, és növelné a paraméterek számát. Viszont lehetnek negatív hozamok is a piacon, mivel a trend mellett még egy Wiener-folyamat is befolyásolja a hozamokat. Amennyiben a diffúzió nagy súlyt kap (nagy σ), akkor a Wiener folyamatunk az R_t-n keresztül és közvetlenül is lassíthatja a buborékképződést, vagy akár csökkenést is eredményezhet. Ez a viselkedés pedig alapból benne van a modellben anélkül, hogy szükségünk lett volna koszinuszra.

Mindkét trendmodellre lehet alkalmazni a Gelfand módszerén alapuló alarmindexet használó válság-előrejelző eljárást, és ezek alapján megadható egy kereskedési stratégia is. Amennyiben ez a stratégia működik, akkor azt állíthatjuk, hogy a múltbeli árfolyam alakulásából nyerünk információt a jövőbeliekre. Ez a gondolat sokakat az erősen vitatott technikai elemzésre emlékeztetheti. Tehát valóban egy olyan módszert adtunk meg, amely leírja, hogy a múltbeli információkra az emberek kollektívan milyen lépést tesznek.

Sornette-ékkel ellentétben, nem célunk ilyen következtetéseket levonni. Helyette egy olyan világot feltételezünk, ahol a nyugodt piaci körülmények között a múltbeli hozamok valóban nem hordoznak információt a jövőre nézve. Extrém, szélsőséges esetekben viszont az embereket befolyásolják ugyanazok a pszichológiai tényezők, amelyek kollektív viselkedéshez vezetnek. Az irodalomban szokás ezt csordaszellemnek is nevezni. Ezen viselkedés hatásának számszerűsítése meglehetősen nehéz feladat. A 3. fejezet előrejelző módszere erre próbál kísérletet tenni. Cikkünk óvatosabban kezelte a kérdéskört. Nem használtuk az alarmindexes előrejelző módszert a Bihary-modell esetén (habár technikailag lehetséges

13 L. Kochmeister-pályázat, E függelék

lenne), hogy kereskedési stratégiát valósítsunk meg, amely során válságokra és buborékok ellen fogadunk. Viszont nem is akartuk a paraméterekben hordozott információt parlagon hagyni, ezért vizsgálat alá vontuk a becsült paraméterek és a bekövetkezett válságok kapcsolatát.

Az empirikus elemzéseket a 2007-es ingatlanbuborék kidurranásának vizsgálatára, tesztelésére végeztük. A Bihary-modell jól illeszkedett az adatsorokra. A paraméterek könnyebb értelmezhetőségének szempontjából a Bihary-modellt egy kvadratikus függvénynyel közelítettük, amely szintén nagyon jó illeszkedést mutatott. Az eredményeink alapján annyit elmondhatunk, hogy a loghozamokban meglehetősen nagy lineáris és nagy negatív görbület együtthatók esetén alakultak ki a válságok, továbbá a zuhanás százalékos értéke többnyire összefügg a paraméterek abszolút értékével. Ezt különböző idősorok adatain vizsgáltuk. További vizsgálatok alapja lehet ennek a kapcsolatnak a feltérképezése. Esetleg klasszifikációs módszereket alkalmazva, megadhatjuk a paramétereknek egy olyan tartományát, amely esetén nagy valószínűséggel válság következik be. Ez az eljárás, ha nem is eléggé megbízható egy kereskedési stratégia megalkotásához, esetleg egy szabályozó szervezet hasznos indikátora lehet, amely utal a buborékok és válságok kialakulására.

A dolgozat legfőbb kérdése, hogy létezhet-e buborékot és válságot vizsgáló módszertan. A válaszunk egyértelműen igen. Sőt, sikerült egy matematikailag az irodalomhoz hasonlóan hatékony modellt konstruálnunk sokkal több közgazdasági tartalommal. A különböző modellek előrejelző képessége már vitathatóbb kérdés. A modellek megbízhatóságának vizsgálata és teljesítményeik összehasonlítása további empirikus teszteket igényel különböző piacok különböző termékeire.

Irodalomjegyzék

Badger, W. W.–Montroll, E. W. [1974]: Introduction to quantitative aspects of social phenomena. Gordon and Breach Science Publishers, New York

Bolla Marianna [2013]: Reprodukáló magú Hilbert-terek (2013. 04. 20.)

Briggs, P. L.– Press, F. [1977]: Pattern recognition applied to uranium prospecting. 268(5616):125–127.

Callen, E.–Shapero, D. [1974]:A theory of social imitation. *Physics Today* 23-28, July

Gelfand, I. M.–Guberman, S. A. –Keilis-Borok, V. I. –Knopo, L.–Press, F. –Ranzman, E. Y. et al. [1976]: Pattern-recognition applied to earthquake epicenters in California. 11:227–283.

Guasoni, P.–Rasonyi, M. [2011]: Fragility of arbitrage and bubbles in diffusion models. Boston: Finance (Topic) 05/2011; DOI:10.2139/ssrn.1856223

Holyst, J. A.–Krawiecki, A.– Helbing, D. [2002]: Volatility clustering and scaling for financial time series due to attractor bubbling. *Physical Review Letters* 89 (158701).

Jacod, J. [1998]: Rates of convergence to the local time of a diffusion. Section B(34):505–544.

Jacod, J. [2000]: Non-parametric kernel estimation of the coeffcient of a diffusion. (27):83–96.

Jacod, J.–Shiryaev, A. N.[1998]: Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case. *Finance Stoch*., 2(3):259–273.

Jarrow, Robert A.– Protter, Philip–Shimbo, Kazuhiro [2007]: Asset price bubbles in complete markets. In *Advances in mathematical finance*, Appl. Numer. Harmon. Anal., pp. 97–121. Birkhäuser Boston, Boston, MA 58

Jarrow, Robert A.– Protter, Philip–Shimbo, Kazuhiro [2010]: Asset price bubbles in incomplete markets. *Math. Finance*, 20(2):145–185.

Jarrow, Robert A.–Kchia, Younes–Protter, Philip [2011]: How to detect an asset bubble. SIAM *Journal on Financial Mathematics* 2:839–865.

Jarrow, Robert A.–Protter, Philip p [2009]: Forward and futures prices with bubbles. Int. Theor, J. *Appl. Finance*, 12(7):901–924.

Johansen, A.–Ledoit, O.–Sornette, D. [1999]: Predicting financial crashes using discrete scale invariance. *Journal of Risk*, 1(4):5–32.

Johansen, A.–Ledoit, O.–Sornette, D. [2000]: Crashes as critical points. 3:219–255.

Johansen, A.–Sornette, D. [1999]: Critical crashes. 12(1):91–94.

Johansen, A.–Sornette, D. [2001]: Bubbles and antibubbles in latin-american, asian and western stock markets: An empirical study. 4(6):853–920.

Kabanov, Yuri [2008]: In discrete time a local martingale is a martingale under an equivalent probability measure. *Finance Stoch*., 12(3):293–297.

Keilis-Borok, V. I.– Soloviev, A. A. [2003]: Nonlinear dynamics of the lithosphere and earthquake prediction.

Keilis-Borok, V.–Soloviev, A.–Allègre, C. B.– Sobolevski, A.–Intriligator, M. [2005]: Patterns of macroeconomic indicators preceding the unemployment rise in Western Europe and the USA. 38(3):423–435.

Nash, Adam [2013]: Behavioral finance explains bubbles (2013. 04. 20.)

Orlean, A. [1995]: Bayesian interactions and collective dynamics of opinion: Herd behavior and mimetic contagion. 28:257–274.

Protter, Philip [2012]: A mathematical theory of financial bubbles. SSRN, June 26

Shiryayev, A. N. [1984]: Probability. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 95, Springer-Verlag, New York

Sornette, D. [2002]: Why stock markets crash – Critical events in complex financial systems. Princeton University Press

Sornette, D. [2003]: Critical market crashes. *Physics Reports* 378:1–98.

Sornette, D.–Zhou, W.-X. [2006]: Predictability of large future changes in major financial indices. *International Journal of Forecasting* 22:153–168.

Sornette, D.–Yan, W.–Woodard, R. [2010]: Diagnosis and prediction of market rebounds in financial markets. *Physica* A 391(4), 1361–1380.

Wanfeng, Yan–Rebib, Réda–Woodard, Ryan–Sornette, Didier [2011]: Detection of crashes and rebounds in major equity markets. RC working paper No. 11-001, July 8.