Soczó Csaba

A KOCKÁZTATOTT ÉRTÉKNÉL NAGYOBB VESZTESÉGEK VIZSGÁLATA

A tíz gazdaságilag legfejlettebb ország (G-10) 1998-ban [3], míg Magyarország 2000-ben vezette be a pénzügyi stabilitás és a bankok felügyeletének nemzetközi szintű harmonizációja érdekében létrehozott Bázeli Bizottság irányelvein alapuló, kereskedési könyvre vonatkozó szabályozást. A rendelkezés egy lényeges sajátossága, hogy a pénzintézeteknek lehetőségük van választani a sztenderd módszer és egy belső modell között a tőkekövetelmény meghatározásakor. A belső modellre vonatkozó előírások a kockáztatottérték-számításon (value at risk – VaR) alapulnak, ami népszerű statisztikai módszer a portfólió kockázati szintjének meghatározásához. A VaR analízis értelmében adott valószínűségi szint és tartási periódus figyelembevételével határozható meg az a legnagyobb veszteség, ami még bekövetkezhet.

A VaR kiszámítása a portfólió hozameloszlásának ismeretében történik. Egyszerűbb modellek a normális eloszláson alapuló, tehát a Gauss görbének megfelelően viselkedő hozamot feltételeznek. Számos kutató arra a következtetésre jutott, hogy ez a megközelítés jelentősen leegyszerűsíti a valóságot, mivel a nagy hozamok/veszteségek valószínűsége lényegesen nagyobb, mint ami a normális eloszlásból következne. Ezt a problémakört szokták fat-tail jelenségként, vagy vastag szélű eloszlásként említeni. A hozam normális eloszlástól való eltérésének vizsgálata egy nagyon fontos probléma felismeréséhez vezetett. A VaR számítás ugyanis azt írja le, hogy milyen a hozam viselkedése adott valószínűség esetében, illetve milyen gyakran fordulnak elő az extrém esetek. Kockázati szempontból azonban az is lényeges, hogy szélsőséges esetekben mekkora a veszteség nagysága. Ennek jellemzésére hivatott a BVaR (beyond the value at risk), ami a VaR értéknél nagyobb veszteségek várható értékét adja meg. Ez a koncepció a portfólió kockázatának jóval pontosabb megközelítését teszi lehetővé, és minél vastagabb szélű az eloszlás, annál nagyobb a jelentősége. Mivel egy korábbi elemzés szerint a fat-tail effektus igen jelentős a magyar piacon [14], ezért indokolt a szélsőséges veszteségek hordozta kockázat részletes vizsgálata.

A BELSŐ MODELL, VaR, BVaR

A jelenlegi szabályozás szerint a Bázeli Bizottság irányelveinek megfelelően a pénzintézetek használhatnak statisztikai alapú modelleket a kereskedési könyvhöz kapcsolódó kamat- és árfolyamkockázat fedezetéhez szükséges tőkekövetelmény meghatározásához. Ezek a belső modellek a hozamra mint valószínűségi változóra vonatkozó kockáztatott érték számításon (VaR) alapulnak, melynek részletes leírása számos forrásból elérhető [6], [11], [12]. A valószínűségi változókra vonatkozó számítások szempontjából kritikus az eloszlásfüggvény [$F(H_0)$] ismerete. Az eloszlásfüggvény egy valószínűségi változóra (H) vonatkozóan megadja, hogy egy adott küszöbértéknél (H_0) kisebb értékeknek mekkora a valószínűsége:

$$F_H(H_0) := P(H<H_0).$$

A VaR módszer esetében annak meghatározása történik, hogy adott valószínűség (1-ε) mellett várhatóan mekkora az a legnagyobb veszteség ($VaR_\varepsilon = -H_\varepsilon$), ami egy bizonyos időtartam alatt bekövetkezhet:

$$P(H<H_\varepsilon) = \varepsilon \Leftrightarrow P(H>H_\varepsilon) = 1-\varepsilon;$$
$$VaR_\varepsilon: = -H_\varepsilon = -F^{-1}{}_H(\varepsilon).$$

A jelenlegi szabályozás szerint a VaR értéket 99 százalékos megbízhatósági szint mellett, 10 napos tartási periódusra kell számítani. A kapott eredmény jelentése, hogy az esetek 99 százalékban a 10 nap alatti veszteség várhatóan a VaR értéknél alacsonyabbnak adódik. A szabályozó természetesen kellő óvatossággal kezeli a belső modell által szolgáltatott értéket, hiszen azt meg kell szorozni egy, a modell pontosságától is függő korrekciós tényezővel. Az amerikai részvénypiacra elvégzett számítások szerint a korrekciós tényező értéke túlságosan nagy, amit nem indokol a hozameloszlás széleinek tényleges vastagsága [3]. A magyar piacra vonatkozó számítások azonban azt mutatják, hogy a szorzófaktor megfelelő [14], amennyiben a pénzintézet normális eloszláson alapuló modellt használ. A korrekciós tényező intervallumának jelenlegi választása viszont azt eredményezi, hogy a pénzintézetek kevésbé pontos modell használatára vannak ösztönözve, hiszen a jobb modellek nagyobb VaR-t eredményeznek, amit a korrekciós tényező változása nem képes kompenzálni. A tőkekövetelmény ebből kifolyólag lényegesen nagyobbnak adódhat pontosabb modellek esetében.

A VaR számítás leírásából világosan látszik a módszer hiányossága. A VaR ugyanis csak arról ad információt, hogy várhatóan csupán az esetekben 1 százalékában adódik a VaR-nál nagyobb veszteség. Ugyanakkor a gyakoriság mellett az is fontos lehet, hogy milyen a VaR-t meghaladó veszteségek nagysága. A szélsőséges veszteségek leírására született meg a BVaR koncepciója, ami megadja, hogy a VaR-nál nagyobb veszteségeknek mennyi a várható értéke [5]:

$$BVaR = -M(H \mid H<-VaR),$$

ahol $M(\mid)$ a feltételes várható értéket, H a hozamot, míg a VaR az adott megbízhatósági szint mellett számított kockáztatott értéket jelöli. Ez a módszer a kockázatok jóval pontosabb leírását teszi lehetővé, mivel a nagy veszteségek előfordulási gyakorisága mellett azok nagysága is befolyásolja az eredményt.

STATISZTIKAI MODELLEK

A valószínűségi változókra vonatkozó számítások szempontjából alapvető feladat az eloszlásfüggvény meghatározása. Egy egyszerű feltevés értelmében a hozam normális eloszlásnak megfelelően viselkedik, ami lehetővé teszi a variancia-kovariancia módszer [6], [12] alkalmazását. Az eloszlás paraméterei, a várható érték és a szórás – a múltbeli adatokból – viszonylag egyszerűen becsülhetők, melyek segítségével megadható a VaR. Számos kutató azonban arra a következtetésre jutott, hogy az ezen a feltevésen alapuló modellek túlságosan sok hibát eredményeznek, hiszen az utótesztelések során a megbízhatósági szintnél (1-ε) jóval nagyobb – szignifikánsan eltérő – arányban adódott a VaR-nál nagyobb veszteséghányad. Ez a megfigyelés azt sugallja, hogy a nagy veszteségek valószínűsége jóval nagyobb, mint ami a normális eloszlás esetében adódik. Az eloszlás széle tehát feltételezhetően vastagabb, mint a Gauss görbén alapuló modellek esetében. Ez a feltevés több elemzés során is igazolást nyert, és fat-tail jelenségnek hívják.

Többféle módszer létezik egy feltételezett eloszlás és a valószínűségi változóra vonatkozó mintavétel során nyert tapasztalati eloszlás viszonyának vizsgálatára. A QQ grafikonok elemzése egy igen szemléletes módja a korábban említett illeszkedésvizsgálatnak. A módszerrel a historikus (vagy empirikus) eloszlás és a minta alapján becsült elméleti (vagy feltételezett) eloszlás összehasonlítása megy végbe. A grafikon vízszintes tengelye a historikus hozamértékeket jelöli. A függőleges tengely a hozamadatokhoz tartozó empirikus valószínűségek alapján, az elméleti eloszlásfüggvény inverzéből számított hozamértéket [$H_\varepsilon = F_H^{-1}(\varepsilon)$] tartalmazza. Az így kapott görbe pontjai tehát adott valószínűségi szintre (ε) vonatkozóan adják meg az empirikus (vízszintes tengely) és a feltételezett (függőleges tengely) eloszlások alapján számított küszöbértéket ($H_{\varepsilon,e}$, $H_{\varepsilon,f}$). Ezen érték jelentése az, hogy ε valószínűséggel a hozam kisebb, mint $H_{\varepsilon,e}$, vagy $H_{\varepsilon,f}$ az empirikus, illetve a feltételezett eloszlás esetében. Amennyiben az elméleti eloszlás jól közelíti az empirikus eloszlást, nyilvánvaló, hogy eredményként közelítőleg egy egyenes adódik. Abban az esetben ugyanis, ha a feltételezett eloszlás megfelelően írja le a valószínűségi változó viselkedését, a hozamértékekhez az eloszlásfüggvényekből számított valószínűségek csaknem megegyezők. Ennek természetesen a fordítottja is igaz az eloszlásfüggvények inverzére. Az 1. ábrán az S&P500 és a BUX index napi hozamadataira számított QQ grafikonok találhatók, ahol elméleti eloszlásként normális eloszlást használtunk. Szembetűnő, hogy a nulla körüli tartományban a görbék mindkét változó esetében megközelítőleg egyenesnek adódtak. Ez S&P500 esetén –0,02-ig, míg a BUX esetében kb. –0,015-ig igaz. Ezen küszöbértékek után azonban nagyon éles az elté-

1. ábra

A BUX és az S&P500 QQ diagramjai

rés az empirikus és a normális eloszlások között, mivel a görbe meredeksége lényegesen csökken. Ez azt jelenti, hogy nagy veszteségek (kis valószínűségek) esetében a normális eloszlás jóval kisebb valószínűséget ad, mint ami az empirikus eloszlásból következik. Ez az eredmény különösen kedvezőtlen, mivel a VaR és a BVaR számítások szempontjából éppen az eloszlás széle, azaz a kis valószínűségekhez tartozó rész a meghatározó.

Az előző bekezdés üzenete az, hogy a kockázati számítások szempontjából sajnos a normális eloszláson alapuló modellek nem kellően pontosak a hozameloszlás széleinek vastagsága miatt. Számos módszer született a vastag szélű eloszlások leírására. Ezek a modellek azonban jóval több számítást igényelnek, és egy összetett portfólió hozamának becslése sem olyan nyilvánvaló. A megközelítés előnye abból a körülményből adódik, hogy a statisztikai számítások során a teljes hozam adatsor helyett a szélsőséges értékeket használják fel. A felismerés fontossága abban rejlik, hogy a VaR számítás szempontjából az eloszlás 1 százalék körüli tartománya a kritikus, ami viszont a várakozások szerint csak az adatok néhány százalékát érinti. Ez merőben eltérő megközelítés a hagyományos eloszlásillesztésekhez képest. A normális eloszláson alapuló RiskMetrics [11] módszer esetében például a szórás becslése során a napi hozamértékek súlya exponenciálisan csökken az eltelt idő függvényében, függetlenül a hozam értékétől. Ebből kifolyólag a tényleges eloszlás szempontjából kritikus szélsőséges értékek súlya rendkívül kicsi lehet, ami viszont azt eredményezheti, hogy az illesztés az eloszlás VaR számítás szempontjából kevésbé kritikus tartományára történik.

Az extrém értékeken alapuló modellek [8], [9] egyik csoportja a blokk maximum módszeren alapul. A modell alapötlete az adatsor meghatározott elemszámú blokkokra való osztása. A statisztikai számításokhoz a blokkok maximális veszteségeit használják fel. Ezen extrém értékek határeloszlását a Fisher-Tippet tétel segítségével lehet meghatározni. A módszernek az a kompromisszuma, hogy a blokkméret növelésével a blokkmaximumok egyre jobban közelítik az általánosított extrémérték-eloszlást, ugyanakkor a rendelkezésre álló adat a blokkok számának csökkenéséből kifolyólag egyre csökken. Ez utóbbi körülmény a becslés pontosságának szempontjából kedvezőtlen.

Az eloszlásszélek becslésének egy másik módszere az eredeti hozamadatokon alapul, az adatsor blokkokra való bontása nélkül. A vastag szélű eloszlásokra vonatkozó feltevés szerint az eloszlásfüggvény széle exponenciális helyett hatványosan csökken. Ez a feltétel a következő módon definiálható:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha}, \text{ ahol: } \alpha > 0.$$

Ezen feltétel mellett a vastag szélű eloszlások az alábbi képlettel közelíthetőek aszimptotikusan:

$$F(X) = 1 - aX^{-\alpha} - o(X^{-\alpha}),\ X\to\infty \text{ esetén, } \alpha>0.$$

Az elmélet szerint a hozamadatok egy küszöbszámot meghaladó értékei kerülnek felhasználásra, és X_i a növekvő sorrendbe állított veszteség (negatív hozam) adatsor i-ik elemét jelöli. A Hill becslés szerint az eloszlás aszimptotikus viselkedését leíró kitevő az alábbi formulával közelíthető:

$$\widehat{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln X_i - \ln X_{m+1}.$$

A módszer értelmében az X_m-nél nagyobb veszteségértékek felhasználásával történik az eloszlás paraméterének becslése. A modell nehézségét az m küszöbindex becslése jelenti. A korábbi módszerek elég heurisztikusnak tűnnek, ugyanis az m meghatározása az $\left(m, \widehat{\frac{1}{\alpha}}\right)$ görbe vizuális elemzésén alapul. A grafikon alapján meg kell becsülni azt a tartományt, ahol $\widehat{\frac{1}{\alpha}}$ stabilnak tekinthető és a becslés torzítása, illetve varianciája kiegyensúlyozott. Az ezen módszer alapján történő küszöbindex-választás sajnos igen önkényesnek tekinthető, ami számottevő ingadozást jelenthet az eloszlás közelítésében. Létezik azonban egy olyan eljárás, amellyel lehetséges a küszöbindex numerikus becslése, és a korábban említett ingadozás megszüntetése [10], [7]. A modell a bootstrapping eljárást használja, melynek során az eredeti adatsornál kisebb elemszámú minták kerülnek mintavételezésre ismétléses módszerrel. A kapott mintákból egy statisztika minimalizálásának segítségével megadható a küszöbindex. A módszer igen összetett és számításigényes, ugyanakkor a teljes adatsor (a küszöbindexig) felhasználásra kerül, és az önkényesség is ki lett küszöbölve.

Az eloszlás α paraméterének ismeretében az alábbi módon lehet becsülni az eloszlásfüggvényt. A korábbiak szerint az eloszlásfüggvény asszimptotikus közelítése esetén az X_v, és X_w-nél nagyobb veszteségek valószínűsége közelítőleg: $F_X(X_v) = \varepsilon_v \approx aX_v^{-\alpha}$, illetve $F_X(X_w) = \varepsilon_w \approx aX_w^{-\alpha}$. A két valószínűség hányadosából az alábbi képlet adódik:

$$X_v \approx X_w \left(\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_w} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

A fenti kifejezésből $X_w = X_m$ esetén becsülhető a veszteség eloszlása $X_v > X_m$-re az alábbi módon $\left(\hat{\varepsilon}_w = \frac{m}{n} \right)$:

$$\hat{F}_x^{-1}(\varepsilon_v) = \hat{X}_v \approx X_m \left(\frac{m}{n\varepsilon_v} \right)^{\frac{\hat{1}}{\alpha}} \text{ illetve:}$$

$$\hat{F}_x(X_v) = \hat{\varepsilon}_v \approx \frac{m}{n} \left(\frac{X_m}{X_v} \right)^{\hat{\alpha}}.$$

A portfólió VaR-ja ezután már könnyen megadható egy tetszőleges megbízhatósági szinthez (1-ε):

$$\mathrm{VaR}(\varepsilon) = \hat{F}_x^{-1}(\varepsilon)$$

Az eloszlásfüggvény szélének ismerete nagy előny nemcsak a pontosabb VaR számítás szempontjából, hanem a VaR értéknél nagyobb veszteségek tulajdonságainak a tanulmányozására is.

A BVaR számítása

Normális eloszlás esetében numerikusan számítható a BVaR a korábban közölt definíció szerinti értéke. Sztenderd normális eloszlás esetében az alábbi képlettel közelíthető a BVaR [5], [9]:

$$\mathrm{BVaR} \approx \mathrm{VaR} + \frac{1}{2}\frac{1}{VaR}.$$

A közelítő képlet üzenete, hogy a Gauss eloszlás esetében a BVaR és VaR különbsége csökken a VaR növekedésével, a veszteségek pedig a VaR környékére koncentrálódnak, hiszen a BVaR közelítő kifejezésében szereplő 2. tag nullához tart a VaR növelésével. Ebből kifolyólag normál eloszlás esetén a VaR-nál nagyobb veszteségek várható értéke közelít a VaR-hoz:

$$\frac{BVaR - VaR}{VaR} \approx \frac{1}{2VaR^2}.$$

A vastag szélű eloszlások vizsgálatával teljesen más következtetésre juthatunk. Szerencsére az aszimptotikus eloszlásfüggvény felhasználásával egzakt kifejezés adódik a BVaR értékére vonatkozóan az alábbi módon[1] ($F'_H = f_H$):

$$\mathrm{BVaR} = VaR + \frac{VaR}{\alpha - 1}.$$

A végeredmény üzenete teljesen ellentétes a normális eloszlás esetén levont következtetéssel. A BVaR értékét a VaR-on kívül az eloszlás α paramétere is befolyásolja, továbbá a VaR növekedésével a BVaR, és VaR relatív távolsága állandó, ami az α értékétől függ:

$$\frac{BVaR - VaR}{VaR} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

1 $\mathrm{BVaR} = \frac{\int_{-\infty}^{-VaR} h f_H(h)dh}{F_H(-VaR)} = \frac{\int_{-\infty}^{-VaR} a\alpha h h^{-1-\alpha} dh}{a(-VaR)^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\left[h^{1-\alpha}\right]_{-\infty}^{-VaR}}{(-VaR)^{-\alpha}} = VaR + \frac{VaR}{\alpha - 1}$

A BVaR és VaR különbsége tehát vastag szélű eloszlások esetében jelentős maradhat a VaR növekedése esetén is. A VaR-nál nagyobb veszteségek koncentrálódása nem figyelhető meg a VaR növekedésével, ami az extrém veszteségek, és a portfólió kockázatának értékelése szempontjából rendkívül fontos. Egy másik lényeges észrevétel két vastag szélű eloszlás összehasonlításával kapcsolatos. Tegyük fel, hogy két különböző eloszlás esetében, ugyanolyan megbízhatósági szintre számolt VaR értékek megegyezőek, az eloszlások α paraméterei viszont lényegesen eltérnek. Ez azt eredményezheti, hogy – noha a VaR értékek megegyeznek – a BVaR-ok lényegesen eltérnek. Ebből tehát a VaR számítás egy lényeges hiányosságára következtethetünk. A VaR szerint ugyanis a két portfólió kockázata megegyezik, a VaR-nál nagyobb veszteségek várható értéke viszont különbözik. Ez utóbbi viszont azt sugallja, hogy ilyen esetekben is a kockázati szintek lényegesen eltérnek egymástól.

Normális eloszláson alapuló modellek esetében belátható az alábbi összefüggés:

$$\frac{BVaR - VaR}{VaR} = \frac{BVaR_{SN} - VaR_{SN}}{VaR_{SN} - \frac{m}{\sigma}},$$

ahol m és s a normális eloszlás paramétereit, míg az SN a sztenderd normális eloszláshoz tartozó értékeket jelöli. A fenti kifejezés értéke 99 százalékos megbízhatósági szint esetében (ε = 1 százalék) az alábbi módon közelíthető:

$$\frac{BVaR - VaR}{VaR} \approx 0{,}146 + 0{,}43 \times \frac{m}{\sigma}.$$

Amennyiben a várható értéket nullának tekintjük, gyakorlatilag a standard normális eloszlásnál bemutatott eredményt kapjuk. Ettől eltérő esetben, a várható értéket a szórásnál legalább egy nagyságrenddel kisebbnek becsülve, belátható, hogy a VaR-nál legfeljebb 19 százalékkal nagyobb a VaR-on túli veszteségek várható értéke. A fenti összefüggések lényeges sajátsága, hogy pozitív várható érték esetében az eloszlás szórásának növekedésével (állandó várható érték mellett) csökken a BVaR relatív távolsága a VaR-tól, azaz a koncentrálódás intenzívebb. Normális eloszlás esetében tehát az extrém veszteségek nem hordoznak túl nagy kockázatot. A növekményt vastag szélű eloszlások esetében viszont az eloszlásszél α paramétere határozza meg. Minél vastagabb az eloszlásszél (minél kisebb α esetén), annál kockázatosabb a portfólió, és annál nagyobb a BVaR és VaR értékek relatív távolsága. Amennyiben tehát a hozameloszlás vastag szélű, a VaR számítás nem eléggé informatív a kockázatról, hiszen a nagy veszteségek gyakoriságán túl azok nagysága is fontos.

Számítási eredmények

A QQ grafikonok segítségével láttuk, hogy az S&P500 és a BUX indexek eloszlásai vastag szélűek. A közép-európai részvényindexre, a CESI-re végzett statisztikai számítások is hasonló eredményre vezettek. Ebből kifolyólag tehát az elemzéshez felhasznált részvényindexek esetében a varianca-kovarianca módszeren alapuló számítások nem kellően pontosak, mivel a VaR elemzés szempontjából kritikus tartományban – az eloszlás végeinél – az empirikus eloszlás lényegesen eltér a normális eloszlástól. Azt is fontos megjegyezni, hogy a Gauss eloszlástól való eltérés azt vonja maga után, hogy a VaR-nál nagyobb veszteségek várható értékének a VaR-tól való eltérése igen jelentős lehet. Ilyen esetekben, mint korábban beláttuk, a VaR nem ad elég információt a kockázati szintről, hiszen az csupán az extrém veszteségek gyakoriságát és a veszteségek várható felső korlátját adja meg. Mint láttuk, normális eloszlás esetében ez nem okoz problémát, hiszen az extrém veszteségek a VaR környékén koncentrálódnak. Vastag szélű eloszlások esetében viszont a VaR értékénél nagyobb veszteségek várható értéke lényegesen meghaladhatja a VaR-t, ezért az extrém veszteségek hordozta kockázat mérésére kiválóan alkalmas BVaR-t is érdemes megvizsgálni.

Az eloszlásvég parametrikus becslése alapján a második fejezetben leírt módszer segítségével meghatározott elméleti eloszlások a 2. ábrán láthatóak. A grafikon szerint az extrém értékek alapján történt számítás segítségével az eloszlás széle igen pontosan becsülhető, ami a korábbiak alapján rendkívül fontos a VaR számítás szempontjából is. Az ábrán jól látható, hogy a BUX-index esetében a VaR-érték lényegesen nagyobb, mint a S&P500-nál. A VaR-nál nagyobb veszteségek eloszlása viszont rendkívül jól mutatja, hogy a veszteségeloszlások karakterisztikája is lényegesen eltérő a két index esetében. Ez az eredmény merőben eltér a normális eloszlás esetére vonatkozó következtetésektől, hiszen ilyenkor a VaR-on túli veszteségek a VaR köré koncentrálódnak, sőt a szórás növekedésével a BVaR és VaR relatív távolsága is egyre kisebbnek adódik. A Hill módszernél viszont láthatjuk, hogy a BUX esetében egyrészt nagyobb a VaR, viszont a VaR-on túli veszteségek eloszlása is lényegesen elnyúltabb. Ezért valószínű, hogy a VaR nem elégséges a két index kockázatának jellemzésére, hiszen nemcsak a veszteség várható felső korlátja különböző, hanem az extrém veszteségek nagysága is lényegesen eltér.

Az 1. táblázat tartalmazza a variancia-kovariancia módszer és az extrém értékeken alapuló számítás (Hill-módszer) segítségével meghatározott VaR és BVaR értékeket. A számításokat napi és a kereskedési könyvben előírt 10 napos tartási periódusra vonatkozóan végeztük el.[2] A variancia-kovariancia módszerrel számolt VaR alapján az S&P500 adódott a legkisebb, míg a CESI a legnagyobb kockázatúnak. A BVaR számítás szerint minden esetben a VaR-nál mintegy 15 százalékkal nagyobb érték adódott, így az extrém értékek várható értékére vonatkozóan nincs lényeges eltérés az indexek között. Továbbá, a normális eloszlásra vonatkozó várakozásnak megfelelően a VaR-nál nagyobb kockázatok mindhárom index esetében a VaR köré koncentrálódnak. Ez tel-

2 A statisztikai számításokat az 1995. június 30-tól 2002. február 7-éig terjedő időszakra végeztük el. A variancia-kovariancia VaR számításához a volatilitás meghatározása az exponenciálisan súlyozott mozgó átlagszámítás segítségével történt ($\lambda = 0,94$) és a 2002. február 7-én becsült értéket használtuk. A Hill módszernél a küszöbindex becslését bootstraping eljárással MS Excel-ben (Visual Basic felhasználásával) végeztük.

2. ábra

A BUX és az S&P500 eloszlásvégeinek összehasonlítása Hill becsléssel

1. táblázat

Az S&P500, BUX és CESI részvényindexekre számított VaR és BVaR értékek variancia-kovariancia (VK) és Hill-módszerrel

	S&P500			BUX			CESI		
	VaR	**BVaR**	**(BVaR-VaR)/VaR**	**VaR**	**BVaR**	**(BVaR-VaR)/VaR**	**VaR**	**BvaR**	**(BVaR-VaR)/VaR**
1 nap									
VK	2,56%	2,94%	0,15	2,93%	3,37%	0,15	3,17%	3,63%	0,15
Hill	3,01%	4,1%	0,36	6,3%	14%	1,22	4,24%	7,18%	0,69
(Hill/VK)	1,18	1,39		2,15	4,15		1,34	1,98	
10 nap									
VK	7,83%	9,03%	0,15	8,57%	9,97%	0,16	9,98%	11,44%	0,15
Hill	5,54%	7,54%	0,36	22,35%	49,67%	1,22	10,89%	18,46%	0,69
(Hill/VK)	0,71	0,83		2,61	4,98		1,09	1,61	

3. ábra

A BUX és az S&P500 eloszlásszéleinek összehasonlítása variancia-kovariancia (VK) módszerrel

jesen összhangban van azzal a korábbi következtetésünkkel, hogy a BVaR számításnak nincs jelentősége a variancia-kovariancia módszer esetében. A *3. ábrán* a variancia-kovariancia módszerrel számított hozameloszlások szélei találhatók. Látható, hogy a két index esetében adódó VaR értékek eltérőek, ugyanakkor a VaR-t meghaladó veszteségek nagy valószínűséggel a VaR-hoz közeli értéknek adódnak. Ez teljesen eltérő attól a következtetéstől, ami a Hill módszer esetében adódott. Azon túlmenően ugyanis, hogy a két VaR jelentősen eltér egymástól, a BUX index esetében a VaR-t meghaladó veszteségek mértéke jóval nagyobb. Az 1. táblázat a Hill módszer használatával kapott VaR és BVaR értékeket is tartalmazza. A VaR számítás szerint az S&P500 index kockázata a legkisebb, míg a BUX indexé a legnagyobb. A BVaR értékek az S&P500 esetében a legkisebbek, míg a BUX indexre a legnagyobbak, ami megegyezik a VaR használatával felállított sorrenddel. A BVaR értékek VaR-hoz viszonyított növekménye viszont lényegesen eltérő a három index esetében. Az S&P500-ra ugyanis 36 százalékkal nagyobb a BVaR, míg a BUX esetében 122 százalékkal. Érdemes megjegyezni, hogy ezek az értékek lényegesen nagyobbak, mint a variancia-kovariancia módszer esetében kapott 15 százalék. Ezekből a számításokból arra a következtetésre juthatunk, hogy nem csupán a 99 százalékos biztonságú veszteséglimit növekedett, hanem a VaR-on túli veszteségek is lényegesen nagyobbak a BUX indexre az extrém értékeken alapuló számítás alapján.

A 2. táblázat két-két index VaR és BVaR értékeit hasonlítja össze különböző módszerek esetében. A variancia-kovariancia módszer alapján a VaR értékek összevetésével a BUX index átlagosan 4 százalékkal magasabb kockázatúnak adódott napi hozamok tekintetében, mint az S&P500. Látható, hogy a VaR és BVaR mérőszámokkal történt összevetés között nincsen lényeges eltérés. A különbség sokkal nagyobb a Hill módszer esetében, hiszen a BUX VaR-ja csaknem kétszer nagyobbnak adódott az S&P500-hoz képest. Ezek szerint a normális eloszláson alapuló eredmény lényegesen torzít a vastag szélű eloszlás illesztéseként kapott eredménnyel összehasonlítva. A BVaR arányokban is a várakozásoknak megfelelően lényeges eltérés van a két különböző módszerrel számított értékek között. Napi hozamok esetében ugyanis a BUX BVaR-ja Hill módszerrel megközelítőleg 3,5-ször nagyobb, mint az S&P500 esetében. A variancia-kovariancia és a Hill módszerek közötti különbség a VaR és BVaR arányokban 10 napos hozam esetében még nagyobbnak adódik. Ezek az eredmények egyrészt megerősítik korábbi következtetésünket, mely szerint a hozameloszlások normalitásának feltételezése pontatlan közelítése a tényleges eloszlásnak. Másrészt rávilágítanak a VaR számítás egy nagyon fontos hiányosságára is. A szélsőséges veszteségek gyakorisága alapján, a VaR értékekből ugyanis arra következtet-

2. táblázat

Az S&P500, BUX és CESI részvényindexekre számított VaR és BVaR értékek összehasonlítása variancia-kovariancia (VK) és Hill-módszer esetén*

	BUX – S&P500		**CESI – S&P500**	
	$\frac{VaR_{BUX}}{VaR_{S\&P500}}$	$\frac{BVaR_{BUX}}{BVaR_{S\&P500}}$	$\frac{VaR_{CESI}}{VaR_{S\&P500}}$	$\frac{BVaR_{CESI}}{BVaR_{S\&P500}}$
1 nap				
VK	1,04	1,05	1,18	1,17
	(0,59; 1,59)	(0,59; 1,59)	(0,82; 1,88)	(0,82; 1,88)
Hill	2,09	3,42	1,41	1,75
10 nap				
VK	1	1,01	1,22	1,21
	(0,53; 1,54)	(0,54; 1,56)	(0,84; 1,97)	(0,84; 1,96)
Hill	4,03	6,59	1,97	2,45

* A VK esetében az adatsor utolsó évére számított arányoknak az átlaga került feltüntetésre. (Zárójelben a minimum és maximum értékek találhatóak.)

hetünk, hogy a BUX kockázata közel kétszer akkora, mint az S&P500 esetében. Az extrém, VaR-nál nagyobb veszteségek nagysága (BVaR) viszont azt mutatja, hogy ennél a két index kockázata sokkal jobban eltér. A Hill módszerrel kapott BVaR és VaR arányainak összehasonlítása alapján ugyanis a BVaR szerint a BUX kockázata napi hozam esetében az S&P500-hoz képest közel 60 százalékkal nagyobb, mint a VaR esetében. A BVaR által kimutatott többletkockázat 10 napos hozam esetében is kb. 60 százalékkal nagyobb a VaR-hoz képest, ami egyébként logikusan következik a Hill módszer esetében a BVaR számítására bemutatott képletből.

A CESI esetében is hasonló eredményre juthatunk, habár itt a két módszer és a két mérőszám között is lényegesen kisebb eltérés adódik. A variancia-kovariancia módszer eredményétől eltérően a CESI és az S&P500 VaR és BVaR arányai napi hozam esetében ugyanis átlagosan csak 19 százalék, illetve 50 százalékkal nagyobbak a Hill módszer esetében. A BVaR számítás alapján a CESI és az S&P500 napi hozamának kockázati különbsége nagyobb, mint a VaR esetében, azonban ez mindössze 24 százalékos eltérést jelent.

Konklúzió

A statisztikai számítások szerint tehát a részvényindexek hozameloszlása lényegesen eltér a normálistól, amint az a QQ ábrákból következtethető. Ebből kifolyólag a variancia-kovarianica módszer szolgáltatta eredmények pontatlanok, hiszen a hozameloszlás a kockázatértékelés szempontjából legkritikusabb részén – a széleken – lényegesen eltér a Gauss görbétől. Az extrém értékek elmélete viszont kiválóan alkalmas a hozameloszlás széleinek becslésére. Az összehasonlító elemzéshez a variancia-kovariancia módszer, illetve a Hill módszer került felhasználásra. Ez utóbbi az eredeti hozamadatok felhasználásával becsli a tényleges eloszlást aszimptotikusan közelítő eloszlás paraméterét.

A hozameloszlás széleinek vastagsága általában nagyobb VaR értéket eredményezett, mint ami a variancia-kovariancia módszerből adódott. Ezen túlmenően, a VaR-nál nagyobb veszteségek valószínűsége is lényegesen nagyobb volt, mint ami a normális eloszlásból következett. Ez a körülmény rámutat a VaR számítás hiányosságára, hiszen az csupán az extrém események gyakoriságát jellemzi. Ez, mint láttuk, nem jelent problémát normális eloszlás esetében, hiszen a VaR-nál nagyobb veszteségek a VaR környékén koncentrálódnak, sőt a koncentrálódás erősödik a szórás növekedésével. Vastag szélű eloszlások esetében viszont teljesen más az extrém veszteségek viselkedése. A VaR-on túl ugyanis igen elnyújtott lehet az eloszlás a paraméterektől függően. Ebből kifolyólag célszerűnek látszik a BVaR definiálása, ami megadja, hogy mennyi a VaR-nál nagyobb veszteségek várható értéke.

A számítások szerint a Hill-módszerrel a BVaR értéke a VaR-hoz viszonyítva mindhárom index esetében lényegesen nagyobbnak adódott, mint a variancia-kovariancia módszernél. Ebből kifolyólag a VaR-nál nagyobb veszteségek mértéke lényegesen nagyobb, mint normális eloszlás esetében, mivel a fat-tail effektus jelentős. Ezen túlmenően a BVaR számítással sikerült rámutatni, hogy a VaR nem elégséges a különböző részvénypiacok összehasonlítására. A magyar és a közép-európai piac az amerikai piachoz képest ugyanis lényegesen kockázatosabbnak bizonyult az extrém veszteségek, illetve a BVaR számítás alapján, mint amire a VaR számítás esetében következtethetünk.

FELHASZNÁLT IRODALOM

1 Antal Judit: A pénzügyi kockázattal kapcsolatos legújabb kutatási eredmények ismertetése – Felügyeleti Füzetek – *ÁPTF*, 1999. június.

2 M. Dacorogna, U. Müller, O. Pictet, C. de Vries: Extremal Forex Returns in Extremely Large Data Sets (http://www.olsen.ch/research/workingpapers/318_extreme.pdf)

3 J. Danielsson, P. Hartmann, C. de Vries: The Cost of Conservatism; *Risk* 11 (1998. január), 101–103. oldal.

4 F. Longin: From Value at Risk to Stress Testing: The Extreme Value Approach; *Journal of Banking & Finance* 24 (2000) 1097–1130. oldal.

5 F. Longin: Beyond the VaR; *The Journal of Derivatives,* 2001 nyár, 36–48. oldal.

6 J. Hull: Options, Futures, & Other Derivatives; 4. kiadás, *Prentince-Hall*, 1999.

7 J. Danielsson, C. de Vries: Value at Risk and Extreme Returns (www.riskResearch.org).

8 Stankovics Hunor: Extrém értékeken alapuló kockázatkezelés a hazai tőkepiacon – Szakdolgozat; BKE, 2001.

9 P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch: Modelling Extremal Events; *Springer,* 1997.

10 J. Danielsson, L. de Haan, L. Peng, C. de Vries: Using a Bootstrap Method to Choose the Sample Fraction in Tail Index Estimation (www.riskResearch.org).

11 J. P. Morgan/Reuters: RiskMetrics TM – Technical Document; 4. Kiadás, New York, 1996.

12 P. Jorion: A kockáztatott érték; *Panem*, Budapest, 1999.

13 Kóbor Ádám: A kamatlábkockázat mérése és kezelése a bankok működésében – Felügyeleti Füzetek – *ÁPTF*, 1998. június.

14 Soczó Csaba: A belső modell és az extrém értékek; *Hitelintézeti Szemle,* 2002. 2. szám.